BERUFSBILDENDE SCHULEN BERSENBRÜCK

—–

HOCHSCHULE OSNABRÜCK

—–

BERUFSBILDENE SCHULEN OSNABRÜCK - BRINKSTRASSE

KOMPAKTKURS
GRUNDLAGEN MATHEMATIK
MATHEMATIK 1

Dozenten: Theodor Gervens
Jürgen Kampmann
Friedhelm Meins
Stefan Uphaus

Datum: 27. August 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Aussagenlogik

Unter einer **Aussage** verstehen wir einen Satz, dem genau ein **Wahrheitswert** entweder wahr (w,1) oder falsch (f,0) zugeordnet werden kann.

Beispiele: Beispiele:

- **Heute regnet es. (Aussage)**
- **Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Aussage)**
- **Wie spät ist es? (keine Aussage)**
- $5 < 6$ **(Aussage)**
- **Dieser Satz ist falsch. (keine Aussage)**
- **Vielleicht werde ich Bundeskanzler. (keine Aussage)**
- **Es gibt eine reelle Zahl** x **mit** $x^2 + x + 10 < 0$**. (Aussage, falsch)**

Aussagen werden mit **Aussagenvariablen** A,B,C,... bezeichnet und können mithilfe von **Verknüpfungsoperatoren** zu neuen Aussagen verknüpft werden. Foglende Operatoren sind in der Aussagenlogik gebräuchlich:

$\overline{A}$: Negation

$A \wedge B$: Konjunktion, UND

$A \vee B$: Disjunktion, ODER

$A \Rightarrow B$: Implikation

$A \Leftrightarrow B$: Äquivalenz

Der Wahrheitsgehalt dieser Verknüpfungsaussagen ist über folgende **Wahrheitstabelle** definiert:

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Zwei durch Verknüpfung entstandene Aussagen werden als gleichwertig oder gleich bezeichnet, wenn sie bei jeder Belegungskombination vorkommender Aussagenvariablen dieselben Wahrheitswerte annehmen.

Beispiel: $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Bei der Verwendung der Verknüpfungsoperatoren gelten folgende Gesetze:

a) $\left.\begin{array}{l}(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)\end{array}\right\}$ Assoziativgesetz

b) $\left.\begin{array}{l}A \wedge B = B \wedge A \\ A \vee B = B \vee A\end{array}\right\}$ Kommutativgesetz

c) $\left.\begin{array}{l}A \wedge A = A \\ A \vee A = A\end{array}\right\}$ Idempotenzgesetz

d) $\left.\begin{array}{l}A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)\end{array}\right\}$ Distributivgesetz

e) $\left.\begin{array}{l}A \wedge \overline{A} = 0(f) \\ A \vee \overline{A} = 1(w)\end{array}\right\}$ Negation

f) $\left.\begin{array}{l}\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \\ \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}\end{array}\right\}$ DeMorgan

Der Nachweis dieser Regeln gelingt durch Aufstellen einer Wahrheitstabelle, so zum Beispiel zu Regel f):

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \wedge B}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Weitere Regeln lassen sich durch Anwendung obiger Gesetze oder durch Aufstellen entsprechender Wahrheitstabellen ableiten.

Beispiele

a) Gegeben seien die Aussagen

A: Ich gewinne nächste Woche mit 6 Richtigen im Lotto.

B: Ich studiere in Osnabrück Elektrotechnik.

Wie lautet die Aussage $\overline{A} \wedge B$ in umgangssprachlichem Deutsch? Formuliere die Negation der Aussage.

Die Aussage lautet: Ich gewinne nicht nächste Woche mit 6 Richtigen im Lotto und ich studiere in Osnabrück Elektrotechnik.
Für die Negation gilt: $\overline{\overline{A} \wedge B} = \overline{\overline{A}} \vee \overline{B} = A \vee \overline{B}$
Also: Ich gewinne nächste Woche mit 6 Richtigen im Lotto oder ich studiere nicht in Osnabrück Elektrotechnik.

b) Man negiere die Aussage $A: \quad -1 \leqslant x \quad und \quad x \leqslant 3$

$\overline{A}: \quad -1 > x \quad oder \quad x > 3$

c) Man zeige $A \Rightarrow B = \overline{A \wedge \overline{B}}$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge \overline{B}}$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

d) Ähnlich zu c) zeige man

$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (indirekter Beweis)

$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Häufig enthalten Aussagen Variablen. Solche Aussagen nennt man **Aussageformen**: Der Wahrheitsgehalt einer Aussagenform ergibt sich erst, wenn die Variable bekannt ist.

Beispiele:

a) A(x): $x < 5$ (x: Variable)

A(3) ist wahr, denn $3 < 5$.

A(7) ist falsch, denn $7 < 5$.

b) B(x): $x^2 - 4x - 5 > 0$

B(5) ist falsch, denn $5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 0$.

B(100) ist wahr, denn $100^2 - 4 \cdot 100 - 100 > 0$.

2 Grundbegriffe der Mengenlehre

Jede Zusammenfassung bestimmter Objekte zu einem Ganzen heißt **Menge**. Die Objekte heißen **Elemente** dieser Menge. Für jedes Element muss feststellbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht (→ Georg Cantor, 1895).

Beispiele:

$$M = \{a, e, i, o, u\} = \{a, a, e, i, o, u\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

$$S = \{x | x \underbrace{\text{ ist Bürger der Stadt Osnabrück}}_{beschreibende Angabe}\} = \{\underbrace{\text{Meyer, Schmidt, } \ldots}_{aufzählende Mengenbeschreibung}\}$$

Man unterscheidet bei einer Mengendefinition zwischen einer beschreibenden und aufzählenden Art. Das **Elementzeichen** $\in$ gibt an, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht.

$$e \in M, k \notin M$$

$100 \in A$

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Die **leere Menge** hat das Sonderzeichen $\emptyset$.

$$\emptyset = \{\} = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 = 2\}$$

Die Mengen A und B heißen **gleich**, falls jedes Element von A auch in B liegt und jedes Element von B auch zu A gehört. Schreibweise: $A = B$.

Die Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, falls jedes Element aus A auch zu B gehört, d.h., falls gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Schreibweise: $A \subset B$.

Beispiele:

$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

$\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4\}$

Offensichtlich gilt:

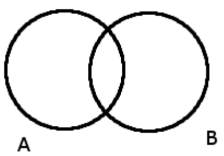
$A \subset B, B \subset A$ dann ist $A = B$

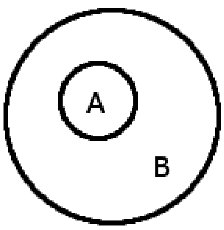
$A \subset A$

$\emptyset \subset A$

$A \subset B, B \subset C$ dann ist $A \subset C$

Mengen werden oft durch **Venn-Diagramme** visualisiert:

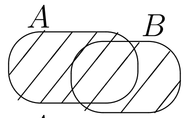




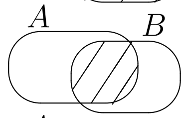
$A \subset B$

Seien A und B zwei Mengen. Dann werden folgende Mengenoperationen definiert:

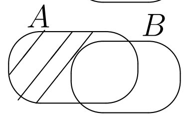
Vereinigung $A \cup B \; = \; \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



Durchschnitt $A \cap B \; = \; \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



Differenz $A \setminus B \; = \; \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$



Vereinigung und Durchschnitt von Mengen entsprechen den aussagenlogischen Operatoren UND und ODER. Es gelten ähnliche Regeln wie in der Aussagenlogik:

a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, (Assoziativgesetz)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

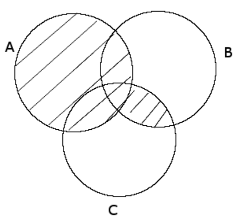
b) $A \cap B = B \cap A$, (Kommutativgesetz)
$A \cup B = B \cup A$

c) $\emptyset \cap A = \emptyset$ (Gesetz zur leeren Menge)
$\emptyset \cup A = A$

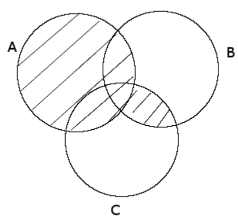
d) $A \cap A = A$ (Idempotenzgesetz)
$A \cup A = A$

e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \leftarrow$ siehe Diagramm

Nachweise können mithilfe von Venn-Diagrammen geführt werden.



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Im Folgenden sei G eine **Grundmenge** (Obermenge). Wir betrachten Teilmengen dieser Grundmenge. Ist die Menge A Teilmenge dieser Grundmenge G, dann setzt man

$$\overline{A} = \{x \in G \mid x \notin A\} = G \setminus A$$

$\overline{A}$ heißt **Komplement** von A.

Beispiel:

$$G = \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$$

$$A = \{2, 4, 6, \ldots, 20\}$$

$$\overline{A} = G \setminus A = \{1, 3, 5, \ldots, 19\}$$

Offensichtlich gilt:

$$A \cup \overline{A} = G,\ A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup G = G,\ A \cap G = A$$

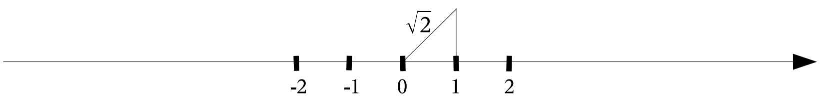
Es gelten für $A, B \subset G$ die "de Morgan'sche Gesetze":

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

3 Einfaches Rechnen mit reellen Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$: Punkte der Zahlengerade



3.1 Teilmengen reeller Zahlen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Eigenschaften:

- $1 \in \mathbb{N}$ bzw. $0 \in \mathbb{N}_0$ ist das Startelement.
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$ (Jede natürliche Zahl besitzt einen Nachfolger.)

Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Eigenschaften:

- Die ganzen Zahlen umfassen alle natürlichen Zahlen mit 0, sowie eine Erweiterung um die Negativen.
- $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow z + 1 \in \mathbb{Z}$ (Jede ganze Zahl hat einen Nachfolger)
- $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow z - 1 \in \mathbb{Z}$ (Jede ganze Zahl hat einen Vorgänger)

Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}\}$ Eigenschaften:

- Dieselbe rationale Zahl kann durch unterschiedliche Brüche ausgedrückt werden, z.B. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot c}{a_2 \cdot c}, c \in \mathbb{N}$.
- Die rationalen Zahlen liegen dicht, d.h. zwischen zwei rationale Zahlen, die nicht gleich sind, liegt mindestens eine weitere rationale Zahl, z.B. der Mittelwert: $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$
- Die rationalen Zahlen sind abzählbar (Cantorsches Diagonalverfahren).
- Es gibt Zahlen auf der Zahlengerade, die nicht rational (also irrational) sind. Solche reellen Zahlen heißen irrational. Dazu zählen z.B.$\sqrt{2}$ oder π.

Es gilt folgende Teilmengenbeziehung: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Als Beispiel soll gezeigt werden, dass die Zahl $\sqrt{2}$ irrational ist[1], d.h. nicht durch einen Bruch dargestellt werden kann. Hierzu wird ein *Widerspruchsbeweis* durchgeführt.

Annahme: Es gibt eine Darstellung

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Dabei kann zusätzlich angenommen werden, dass mindestens eine der beiden Zahlen p und q nicht durch zwei teilbar ist. Andernfalls kürzt man den Bruch p/q solange durch zwei, bis p oder q nicht mehr den Faktor 2 enthält (Beispiel: $32/24 \rightarrow 4/3$, $40/24 \rightarrow 5/3$).

[1] Hier ist mit $\sqrt{2}$ die positive Wurzel von 2 gemeint.

Quadrieren beider Seiten von (1) liefert nun

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot q^2 = p^2 \tag{2}$$

$\Rightarrow$ p^2 ist durch zwei teilbar und damit gerade.

$\Rightarrow$ Auch p ist gerade. Wäre p ungerade, so wäre auch p^2 ungerade, denn das Produkt zweier ungerader Zahlen ist wieder ungerade.

$\Rightarrow$ $p = 2 \cdot \tilde{p}$ mit $\tilde{p} \in \mathbb{N}$

Dieses setzt man jetzt in (2) ein.

$\Rightarrow$ $2 \cdot q^2 = (2 \cdot \tilde{p})^2 = 4 \cdot \tilde{p}^2$

$\Rightarrow$ $q^2 = 2 \cdot \tilde{p}^2$

$\Rightarrow$ q^2 ist durch zwei teilbar.

$\Rightarrow$ Auch q ist durch zwei teilbar.

$\Rightarrow$ p und q sind beide durch zwei teilbar.

Dieses ist aber ein Widerspruch, denn aufgrund der Annahme (1) konnten die beiden Zahlen p und q so gewählt werden, daß mindestens eine der beiden ungerade ist. Die Annahme (1) kann damit nicht richtig sein, die Zahl $\sqrt{2}$ kann somit nicht durch einen Bruch dargestellt werden. Sie ist also irrational.

3.2 Dezimalschreibweise reeller Zahlen

Jede reelle Zahl x kann als Dezimalzahl mit $n \in \mathbb{Z}$ und Ziffern $a_i, b_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ in der Form

$$\begin{aligned} x &= \pm a_n \dots a_0, b_1 b_2 \dots \\ &= \pm 0, a_n a_{n-1} \dots a_0 b_1 b_2 \dots \cdot 10^{n+1} \\ &= \pm a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \dots \end{aligned}$$

geschrieben werden.

Beispiele:
$320,45 = 0,32045 \cdot 10^3$
$0,00000012 = 0,12 \cdot 10^{-6}$

Dabei gilt:

- Die endlichen und unendlichen periodischen Dezimalzahlen sind rationale Zahlen und können als Bruch geschrieben werden.
- Die unendlichen aperiodischen Dezimalzahlen sind irrational.

Beispiele:

$\frac{3}{4} = 0,75, \qquad 4.123 = 4\frac{123}{1000} = \frac{4123}{1000}$

$\sqrt{2} = 1,4142\ldots, \qquad \pi = 3,14\ldots$

$0,\overline{1} = \frac{1}{9}, \qquad 0,\overline{01} = \frac{1}{99}, \qquad 0,\overline{001} = \frac{1}{999}$

Die Umrechnung periodischer Dezimalzahlen in einen Bruch wird im Folgenden an einem Beispiel vorgeführt. Gegeben sei die periodische Zahl

$$x = 3,2\overline{14}$$

Dann gilt: $10 \cdot x = 32,\overline{14}$ und $1000 \cdot x = 3214,\overline{14}$, also

$$1000 \cdot x - 10 \cdot x = 3214 - 32 \quad \Longrightarrow \quad 990 \cdot x = 3182 \quad \Longrightarrow x = \frac{3182}{990}$$

Übung: Man schreibe die Zahl $0,28\overline{140}$ als Bruch.

Dann ist $100 \cdot x = 28,\overline{140}$ und $100000 \cdot x = 28140,\overline{140}$, für die Differenz:

$$10000 \cdot x - 100 \cdot x = 28140 - 28 \quad \Longrightarrow \quad 99900 \cdot x = 28112 \quad \Longrightarrow x = \frac{28112}{99900}$$

3.3 Körperstruktur der reellen Zahlen

Bei der Einführung der reellen Zahlen verfolgen wir ansatzweise einen axiomatischen Aufbau, wie er in der Mathematik vielfach üblich ist. Dabei wird versucht, alle Eigenschaften der reellen Zahlen auf einige wesentliche, möglichst wenige Grundgesetze, sogenannte Axiome, zurückzuführen. Im Laufe der Geschichte der Mathematik haben sich in Bezug auf das Rechnen mit reellen Zahlen folgende Axiome als wesentlich herausgestellt. Man kann sie einteilen in Axiome hinsichtlich der Addition, hinsichtlich der Multiplikation und bezogen auf die Verträglichkeit der Addition mit der Multipikation.

3.3.1 Grundgesetze der Addition

1. Je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist genau eine reelle Zahl $a + b$ zugeordnet

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$, für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz)

3. $a + b = b + a$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz)

4. Es gibt eine reelle Zahl 0, sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a + 0 = a$ (Gesetz vom neutralen Element)

5. Zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl a^* mit $a + a^* = 0$ (Schreibweise $a^* = -a$) (Gesetz vom negativen Element)

3.3.2 Grundgesetze der Multiplikation

1. Je zwei Zahlen a,b $\in \mathbb{R}$ ist genau eine reelle Zahl $a \cdot b$ zugeordnet

2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz)

3. $a \cdot b = b \cdot a$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz)

4. Es gibt eine reelle Zahl 1, sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot 1 = a$ (Gesetz vom neutralen Element)

5. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt es ein $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, sodass gilt $a \cdot \tilde{a} = 1$ (Schreibweise $\tilde{a} = \frac{1}{a} = a^{-1}$) (Gesetz vom inversen Element)

3.3.3 Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$(Von links nach rechts) : Ausmultiplizieren
$\longleftarrow$(Von rechts nach links) : Ausklammern

3.3.4 Bemerkungen

1. Eine beliebige Menge M mit zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, welche obigen Grundgesetzen genügt, heißt in der Mathematik **Körper**, (M,$\oplus$,$\odot$).
   ($\mathbb{R}$, $+$, $\cdot$) ist der reelle Körper.
   Eine Menge M mit einer Verknüpfung, welche den ersten 5 Grundgesetzen genügt, heißt **Gruppe**, (M, $\oplus$).

2. Zum weiteren Rechnen werden etliche Verabredungen\Definitionen getroffen, z.B:

   (a) Punktrechnung vor Strichrechnung
   $(a \cdot b) + c = a \cdot b + c$

   (b) Ünnötige", assoziative Klammern fallen weg
   $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

   (c) Falls keine Verwechslung möglich ist, kann das Punktzeichen $\cdot$ wegfallen
   $a \cdot b = ab$

   (d) Als Bruch bezeichnet man $\frac{a}{b} = a : b = a \cdot \frac{1}{b}$

   (e) Folgende Schreibweise ist üblich (Potenzen)
   $a^0 = 1$
   $a^1 = a$
   $a^2 = a \cdot a$
   $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal}$
   Rekursiv gilt: $a^n = a^{n-1} \cdot a$

   (f) Die neutralen Elemente 0 und 1 sind auch eindeutig. Das kann aus den Grundgesetzen abgeleitet werden.

   Denn: Wir nehmen an, es gäbe zwei neutrale Elemente 0 und $\tilde{0}$
   Dann gilt: $\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0$
   Analoges gilt für das neutrale Element 1.

3.4 Folgerungen aus den Grundgesetzen

1. Jede Gleichung $a + x = b$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{R}$.
   Die Lösung lautet $x = b - a$.
   Denn: $a + (b - a) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b$.
   Weiterhin ist zu zeigen, dass die Lösung eindeutig ist. Seien x_1 und x_2 Lösungen, dann zeigt man mit den Grundgesetzen:
   $$\left.\begin{aligned} a + x_1 = b \\ a + x_2 = b \end{aligned}\right\} \quad a + x_1 = a + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

2. Jede Gleichung $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ hat genau eine Lösung: $x = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}$

3. $-(-a) = a$
4. $-(a+b) = -a-b$
5. $(-a)b = -ab = a(-b)$
6. $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$
7. $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$
8. $a\cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
9. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{\overbrace{a\cdot c}^{\text{Zähler}}}{\underbrace{b\cdot d}_{\text{Nenner}}} \quad b,d\neq 0$
10. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d} \quad b,d\neq 0$
11. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
12. Binomische Formeln
    $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (1. binomische Formel)
    $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ (2. binomische Formel)
    $(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$ (3. binomische Formel)
13. Für Potenzen gilt:

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m},\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$
$$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n,\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

Beispiele Man zeige:

1. $\dfrac{\frac{13}{7}-2}{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}} = \ldots \qquad = -\frac{12}{49}$
2. $\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}}{\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \ldots \qquad = \frac{-4x}{x+3}$

3. $\dfrac{\dfrac{1}{s^2-1}-\dfrac{1}{s^2}}{2+\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}} = \ldots \qquad = \dfrac{1}{2s^4}$

4. $\dfrac{m-1}{1-\dfrac{1}{m}} \cdot \left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+1}\right) = \ldots \qquad = \dfrac{2}{m+1}$

5. Man schreibe die folgenden Zahlen in der Form $\pm a \cdot 10^n$ mit $1 \leq a < 10$ und $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $123456.7 \qquad = 1.234567 \cdot 10^5$
   (b) $-0.0000009 \qquad = -9 \cdot 10^{-7}$
   (c) $0.003 + 0.00000005 \qquad = 3.00005 \cdot 10^{-3}$
   (d) $1000000 \cdot 0.0007 \qquad = 7 \cdot 10^2$
   (e) $4 \cdot 10^{10} - 12.6 \cdot 10^9 \qquad = 2.74 \cdot 10^{10}$
   (f) $34.12 \cdot (10^3)^5 \qquad = 3.412 \cdot 10^{16}$

6. Man fakorisiere mithilfe der binomischen Formeln (Hinweis: quadratische Ergånzung).

   (a) $x^2 + 12x + 36 \qquad = (x+6)^2$
   (b) $x^2 - 8x + 7 \qquad = (x-1)(x-7)$
   (c) $x^4 - 1 \qquad = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
   (d) $2x^2 + 24x + 54 \qquad = 2(x+9)(x+3)$

7. Man vereinfache

   (a) $2^n - 2^{n-1} \qquad = 2^{n-1}$
   (b) $\dfrac{4^m}{2^{m-1}} \qquad = 2^{m+1}$
   (c) $\dfrac{(a^3b^4)^3}{(a^2b^3)^2} \qquad = a^5b^6$
   (d) $\dfrac{2^8(2^2)^4}{4^7} + (\frac{1}{2})^{-3} \qquad =12$

. . . .

4 Wurzeln, Potenzen mit rationalen Hochzahlen

Die n-te **Wurzel** einer Zahl $a \geq 0$ ist die nicht negative reelle Zahl x, deren n-te Potenz gleich a ist, also die Zahl $x \geq 0$ für die gilt $x^n = a$;
Schreibweise:

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen heißen auch **Radikanden**, die Hochzahlen wie schon zuvor **Exponenten**. In der Potenzschreibweise heißt a auch **Basis**.

Ist $n = 2$, so kann die Ziffer 2 am Wurzelzeichen entfallen:

$$x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Ist n ungerade, so sind auch negative Radikanden erlaubt.

Beispiele

1. $\sqrt[2]{16} = 4$, $\sqrt[2]{-16}$ existiert nicht!
2. $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$
3. $\sqrt[10]{1024} = 2$
4. $\sqrt[4]{625}$ $= 5$
5. $\left((\sqrt[6]{2})^{20}\right)^3$ $= 1024$

Die Berechnung einer Wurzel ist in der Regel nicht ganz so trivial, da dies nicht direkt mit Anwendungen der Grundrechenarten wie Multiplikation oder Division zu bewerkstelligen ist, zumal die Wurzel auch einfacher Zahlen, wie beispielsweise bei $a = 2$, irrational sein kann. Hierfür sind Näherungsverfahren bekannt, die ein wissenschaftlicher Taschenrechner in der Regel effizient implementiert hat.

Nimmt man die n-te Wurzel zur m-ten Potenz, so erhalten wir im Exponenten eine Zahl, die sich wieder als Bruch, also als eine rationale Hochzahl, schreiben lässt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Es gelten dieselben Rechenregeln wie für ganzzahlige Potenzen, nur jetzt mit Brüchen p und q nun im Exponenten.

Regeln

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

2. $a^p\, b^p = (ab)^p,\ \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$

3. $(a^p)^q = a^{pq}$

In Rechenbeispielen empfiehlt es sich, zunächst in die Exponentendarstellung zu wechseln, da dann die Regeln greifen.

Beispiele

- $\sqrt{25^3} = 25^{\frac{3}{2}} = 125$
- $\left(9^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3$
- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[8]{7}}} = 7^{\frac{1}{8\cdot 5\cdot 3}} = 1,016348\ldots$
- $T(a) = \dfrac{\sqrt[6]{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}}{\sqrt[4]{a^{-2}\sqrt{a}}} = \ldots = a^{\frac{11}{8}}$
- $\dfrac{2+3\sqrt{5}}{4-\sqrt{15}} = \dfrac{(2+3\sqrt{5})(4+\sqrt{15})}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = \dfrac{8+3\sqrt{5}\sqrt{15}+12\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{4^2-(\sqrt{15})^2} = 8+15\sqrt{3}+12\sqrt{5}+2\sqrt{15}$
- $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} = \dfrac{18+5\sqrt{10}}{2}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{x}\ x^2(\sqrt[4]{x})^2}{\sqrt[6]{x^5}} = x^2$

5 Logarithmen

Zum Logarithmus wird man durch Lösen der Potenzaufgabe

$$a = b^x$$

geführt. Sind die reellen Zahlen a und b positiv, so sucht man eine Lösung dieser Potenzgleichung. Man kann zeigen, dass die Lösung x in eindeutiger Weise existiert. Die Lösung heißt Logarithmus. Der Logarithmus einer Zahl a zur Basis b ist also diejenige Hochzahl, mit der b potenziert werden muss, um a zu erhalten.
Schreibweise:

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a,\ \ a,b > 0,\ \ b \neq 1$$

In gewisser Weise ist somit das Logarithmieren eine Umkehrung des Potenzierens.

Beispiele

$\log_5 25 = 2,\ \text{da } 5^2 = 25$

$\log_2 0,25 = -2,\ \text{da } 2^{-2} = 0,25$

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2},\ \text{da } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\log_b b = 1,\ \log_b 1 = 0,\ \log_b(b^x) = x$

Bestimmte Basen sind besonders wichtig. Diese werden deshalb besonders gekennzeichnet.

Spezielle Logarithmen

$\log_{10} a = \log(a) = \lg(a)$ dekadischer Logarithmus

$\log_2 a = \text{ld } (a)$ dualer Logarithmus

$\log_e a = \ln(a)$ natürlicher Logarithmus $(e = 2,71828\ldots)$

Auch für das Rechnen mit Logarithmen existieren wichtige **Regeln**

$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$

$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v),$

$\log_b(u^r) = r \cdot \log_b(u), \quad (r \in \mathbb{Q},\ u, v > 0)$

Der Nachweis der Logarithmenregeln gelingt über die Potenzregeln.
Für die erste Regel gilt z.B.:

$u \cdot v = u \cdot v$

$\Rightarrow b^{\log_b(u \cdot v)} = b^{\log_b(u)} \cdot b^{\log_b(v)}$

$\Rightarrow b^{\log_b(u \cdot v)} = b^{\log_b(u) + \log_b(v)}$ (Potenzregel)

$\Rightarrow \log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$

Beispiele

1.) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

2.) $\ln e + \ln \frac{1}{e} = \ln(e \cdot \frac{1}{e}) = \ln 1 = 0$

3.) $\lg\left(\ln(e^{10x})\right) = \lg(10x) = \lg(10) + \lg(x) = 1 + \lg(x)$

4.) Man schreibe als Summe:

$$\lg\left(100\sqrt[7]{0,68 \cdot \sqrt[3]{150}}\right) \qquad = 2 + \tfrac{1}{7}(\lg(0,68) + \tfrac{1}{3}\lg(150))$$

5.) Man schreibe als Summe:

$$\log\left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y}}{\sqrt[3]{10}}\right)^{10} \qquad = -\tfrac{10}{3} + 5\log x + 2\log y$$

6.) Man fasse zu einem Logarithmus zusammen:

$$\log(x-1) + 2\log(x+1) - \log(x^2-1) + \log 3 \qquad \log(3(x+1))$$

7.) Man bestimme die reellen Lösungen der Gleichung $2^{2x+3} = 4$
$2x + 3 = \mathrm{ld}(4) = 2$
$2x = -1$, also $x = -\frac{1}{2}$

8.) Man bestimme die Lösungen der Gleichung $\ln(2x-3) = 6$.
$2x - 3 = e^6$, also $x = \frac{e^6+3}{2}$

Logarithmen verschiedener Basen lassen sich ineinander überführen. Seien $\log_a(x)$ und $\log_b(x)$ zwei Logarithmen zur Basis a bzw. b. Dann gilt für eine beliebige Zahl $x > 0$:

$$x = a^{\log_a(x)} = b^{\log_b(x)}$$

Logarithmiert man auf beiden Seiten zur Basis a, dann erhält man die Umrechnungsformel für Loagrithmen:

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$$

Mit $x = b$ findet man für die Basen:

$$1 = \log_a(b) \cdot \log_b(a), \quad \Rightarrow \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

Für die konkreten Basen $a = 2$ und $b = e$ ergibt sich dann beispielsweise die Umrechnung vom natürlichen in den dualen Logarithmus:

$$\mathrm{ld}(x) = \mathrm{ld}(e) \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)}$$

6 Anordnung reeller Zahlen, Betrag

Auf den Körper der reellen Zahlen kann eine Ordnung, genauer gesagt **Ordnungsrelation**, definiert werden. Diese Ordnung besagt, dass für zwei reelle Zahlen a, b genau eine der drei Relationen wahr:

$a < b$

$a = b$

$b < a$

Weitere übliche Schreib- und Sprechweisen sind u.a.:

a) $a > b$ ist gleichbedeutend mit: $b < a$

b) $a \leq b$ meint: $a < b$ oder $a = b$

c) $a \geq b$ meint: $a > b$ oder $a = b$

d) $a \leq b \leq c$ meint: $a \leq b$ und $b \leq c$

e) a heißt **positiv**, falls $a > 0$

f) a heißt **negativ**, falls $a < 0$

Von der Relation werden folgende (geforderte) Anordnungsaxiome erfüllt.

Anordnungsaxiome

1) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ Transitivität

2) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ Monotonie der Addition

3) $\left.\begin{array}{lll} a < b & \Leftrightarrow & a \cdot c < b \cdot c, \quad c > 0 \\ a < b & \Leftrightarrow & a \cdot c > b \cdot c, \quad c < 0 \end{array}\right\}$ Monotonie der Multiplikation

Mit Hilfe der Anordnung reeller Zahlen lassen sich spezielle **Intervalle** definieren.

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & \text{links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall} \\ [a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \text{links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall} \\ (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \end{array}$$

Aus den axiomatischen Grundeigenschaften können auch mithilfe der Körpergesetze weitere wichtige Eigenschaften abgeleitet werden:

1. $0 < a < b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$
2. $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ und ebenso $a > 0 \Rightarrow -a < 0$
3. $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$ und ebenso $a > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1$
4. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
5. $a \cdot b > 0 \Rightarrow (a > 0$ und $b > 0$)oder $(a < 0$ und $b < 0)$
6. $a \cdot b < 0 \Rightarrow (a > 0$ und $b < 0$)oder $(a < 0$ und $b > 0)$

Beispiel

1. Für welche reelle Zahlen gilt: $-4x + 6 \geq -2(x-1)$

   Man löst unter Berücksichtigung der Regeln nach x auf:
   $-4x + 6 \geq -2x + 2$, d.h. $-2x \geq -4$, d.h. $x \leq 2$, somit gilt für die Lösungsmenge:
   $L = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$

2. Zu bestimmen sind die $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $x^2 - 4x + 3 \;<\; 0$

   Zur Lösung kann man die quadratische Form mithilfe einer quadratischen Ergänzung fakorisieren: $(x-3)(x-1) < 0$,
   d.h. $(x - 3 > 0$ und $x - 1 < 0)$ oder $(x - 3 < 0$ und $x - 1 > 0)$
   d.h. $(x > 3$ und $x < 1)$ oder $(x < 3$ und $x > 1)$. Die zweite Klammer entspricht der leeren Menge, sodass als Lösungsmenge bleibt: $L = (1, 3)$

Der **Betrag einer reellen Zahl** $x \in \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Betrag einer Zahl $\neq 0$ ist also immer positiv, d.h. $|x| > 0$, falls $x \neq 0$.

Beispiele

$$|2| = 2$$

$$|-2| = -(-2) = 2$$

$$|3-6| = |-3| = -(-3) = 3$$

$$|1-|3-6|| = |1-3| = |-2| = 2$$

$$|4x-8| = \begin{cases} 4x-8 & , \quad 4x-8 \geq 0 \\ -(4x-8) & , \quad 4x-8 < 2 \end{cases} = \begin{cases} 4x-8 & , \quad x \geq 2 \\ 8-4x & , \quad x < 2 \end{cases}$$

Der Betrag einer reellen Zahl besitzt folgende **Eigenschaften:**

$$|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$|x-y| \geq ||x| - |y||$$

$$|x \cdot y| = |x||y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Häufig werden mit Beträgen auch Intervalle beschrieben:

a) $|x| \leq 2$ d.h. $x \in [-2, 2]$

b) $|x-2| < 4$ d.h. $x \in (-2, 6)$

c) $|x-x_0| < \epsilon$ d.h. $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

7 Gleichungen

Eine der Hauptaufgaben im Umgang mit reellen Zahlen ist es, diejenigen Zahlen zu bestimmen, die einer oder mehreren gegebenen Gleichungen bzw. Ungleichungen genügen. Um zur Lösung zu gelangen, bedarf es manchmal geschickter Umformungen, bisweilen ist eine Lösung auch nicht explizit nach der gesuchten Variablen auflösbar. Wir beschäftigen uns in einigen Beispielen mit einfachen Gleichungen, auch um den Umgang mit reellen Zahlen zu üben.

1) **Lineare Gleichung** Eine lineare Gleichung mit der Unbekannten x kann in die Form $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ gebracht werden. Die eindeutige Lösung lautet dann $x = -\frac{b}{a}$.

Beispiel

$2x + 5 = 3 - 7x$, d.h. $9x = -2$, also: $x = -\frac{2}{9}$

2) **Betragsgleichung:** Die Variable x kommt in irgendeiner Weise in einem Betrag vor. Zur Ermittlung der Lösung(en) sind dann Fallunterscheidungen zur Auflösung des Betrages zu durchzuführen.

Beispiel

$x + |x - 1| = 3$

$$\begin{array}{rcrcl}
\underline{\text{1. Fall}}\ x \geq 1 & : & x + x - 1 & = & 3 \\
 & & 2x & = & 4 \\
 & & x & = & 2,\ \mathbb{L}_1 = \{2\} \\
\underline{\text{2. Fall}}\ x < 1 & : & x - x + 1 & = & 3 \\
 & & 1 & = & 3,\ \mathbb{L}_2 = \emptyset
\end{array}$$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2\}$

3) **Quadratische Gleichung**
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ mit $a \neq 0$ in Abhångigkeit der reellen Zahlen a, b, c.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && a \neq 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
x^2 + px + q &= 0 && p = \tfrac{b}{a} = 0, q = \tfrac{c}{a} \\
\underbrace{x^2 + px + (\frac{p}{2})^2}\ -(\frac{p}{2})^2 + q &= 0 && \text{(quadratische Ergänzung)} \\
x^2 + 2\frac{p}{2}x + (\frac{p}{2})^2 &= (x + \frac{p}{2})^2 \\
(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q &= \frac{p^2 - 4q}{4} \\
x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} &= \pm\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} && \text{falls } D = p^2 - 4q > 0
\end{aligned}$$

Die Lösung fasst man in der sogenannten **p-q Formel** zusammen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}, &\quad \text{falls } D > 0 \\ x = -\frac{p}{2}, &\quad \text{falls } D = 0 \\ \text{keine Lösung}, &\quad \text{falls } D < 0 \end{aligned}$$

wobei D die Diskriminante mit $D = p^2 - 4q$ ist.

Beispiele: Man ermittle die Lösungen der quadratischen Gleichung.

1. $x^2 - 11x + 10 = 0$ $\qquad x_1 = 10, x_2 = 1$
2. $x^2 - 3x = 0$ $\qquad x_1 = 0, x_2 = 3$
3. $x^2 = 9$ $\qquad x_1 = 3,\ x_2 = -3$
4. $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+2} = 1$ $\qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}$

4) **Biquadratische Gleichung**
Die Variable x kommt nur in der quadratischen Form x^2 vor und stellt eine quadratische Gleichung in x^2 dar. Die Gleichung kann mithilfe einer Substitution $u = x^2$ gelöst werden. Eine biquadratsiche Gleichung kann also maximal vier reelle Lösungen besitzen.

Beispiel
Man löse die Gleichung: $x^4 + x^2 = 12$
Mit der Substitution $u = x^2 \Rightarrow u^2 + u - 12 = 0 \Rightarrow (u+4)(u-3) = 0 \Rightarrow u_1 = -4, u_2 = 3$
Resubstitution führt zu $x^2 = -4$ und $x^2 = 3$. Die erstere der Gleichungen besitzt keine Lösung, die zweite die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

5) **Wurzelgleichung**
Wurzelgleichungen löst man, indem man die Gleichung entsprechend oft quadriert bzw. potenziert. Diese Umformung ist jedoch keine äquivalente Umformung, d.h., die Lösungsmenge kann sich in der Weise ändern, dass neue Lösungen hinzukommen. In jedem Fall sind also die am Ende erhaltenen Lösungen zur Verifizierung hinterher wieder in die Originalgleichung einzusetzen.

Beispiel 1: $\sqrt{2x+10} = x+1$

Quadrieren führt zu $2x+10=(x+1)^2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$.
Einsetzen zeigt, dass nur $x=3$ eine Lösung darstellt.

Beispiel 2: $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{6}$

Nach zweimaligem Quadrieren erhält man eine quadratische Gleichung mit der einzigen Lösung $x=0,5$. Die Probe zeigt, dass die Lösung richtig ist.

Beispiel 3: Wo steckt der Fehler?

$$\begin{aligned}
-20 &= -20 \\
\Rightarrow 16-36 &= 25-45 \\
\Rightarrow 16-36+\frac{81}{4} &= 25-45+\frac{81}{4} \\
\Rightarrow \left(4-\frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5-\frac{9}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow 4-\frac{9}{2} &= 5-\frac{9}{2} \\
\Rightarrow 4 &= 5
\end{aligned}$$

6) **Potenzgleichung**
Die zu findende Variable steht im Exponenten. Um also Potenzgleichungen zu lösen, ist die Gleichung in der Regel zu logarithmieren. Dabei sind natürlich die logarithmischen Gesetzmäßigkeiten zu beachten. Das Logarithmieren einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Beispiel 1: $12\cdot 3^{2x-3}\cdot 2^{x-3}=6^{x-1}$

Logarithmieren mit der Basis e führt zu: $\ln 12+(2x-3)\ln 3+(x-3)\ln 2=(x-1)\ln 6$
Auflösen nach x bringt: $x=\dfrac{-\ln 6-\ln 12+3\ln 3+3\ln 2}{2\ln 3+\ln 2-\ln 6}$, also $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 3}=1$.

Beispiel 2: Man bestimme die reellen Lösungen der Gleichung $e^{x^2}=2^x$.
$e^{x^2}=e^{x\ \ln(2)}$ (nun logarithmieren)
$x^2=x\ \ln(2)$
$x(x-\ln 2)=0$
$x_1=0,\ x_2=\ln(2)$

Beispiel 3 Man bestimme die reellen Lösungen der Gleichung $3^{x+1}+3^{x-1}=30$.
$3\cdot 3^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x=30,\quad \frac{10}{3}\cdot 3^x=30,\quad$ d.h. $3^x=9$, also $x=2$

Beispiel 4 Man löse die Gleichung $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}$ (Hinweis: Substitution $u = e^x$).

$\frac{u + \frac{1}{u}}{u - \frac{1}{u}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}, \quad$ d.h. $u^2 = 3$, also $u = \pm\sqrt{3}$,

Resubstitution: $e^x = \pm\sqrt{3}$, nur möglich $e^x = \sqrt{3}$, d.h. $x = \ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln 3$

7) **Logarithmengleichung**
Die zu suchende Variable steht ein oder mehrmals hinter dem Logarithmus. Unter Berücksichtigung der Potenz- und Logarithmenregeln ist die Gleichung in der Regel zu potenzieren und nach der Variablen aufzulösen. Das Potenzieren einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Beispiel: $\ln(x+1) - \ln(x) = 2$

Logarithmen können zusammengefasst werden: $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2$, Potenzieren führt zu: $\frac{x+1}{x} = e^2$, $1 + \frac{1}{x} = e^2$, also $\frac{1}{x} = e^2 - 1$ und $x = \frac{1}{e^2 - 1}$.

8 Ungleichungen

Analog zu Gleichungen sucht man bei Ungleichungen einer Variablen x nach allen rellen Zahlen, die eine gegebene Ungleichung erfüllen. Anders als bei Gleichungen einer Variablen ergeben sich jedoch nicht nur einzelne (diskrete) Werte, sondern eventuell ganze Intervalle als Lösungsmenge. Es folgen einige Beispiele.

a.) Suche alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x + 1 \leq -x + 5$

$$\begin{array}{lrcl} & x+1 & \leq & -x+5 \\ \Leftrightarrow & 2x & \leq & 4 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2 \\ \text{also} & \mathbb{L} & = & \{x | x \leq 2\} = (-\infty, 2] \end{array}$$

b.)
$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2, \ x \neq 1$$

$$\begin{array}{lcrcl} \underline{\text{1. Fall}}\ x > 1 & : & x+1 & \leq & 2(x-1) \\ & & -x & \leq & -3 \\ & & x & \geq & 3, \ \mathbb{L}_1 = \{x | x \geq 3\} = [3, \infty) \\ \underline{\text{2. Fall}}\ x < 1 & : & x+1 & \geq & 2(x-1) \\ & & x & \leq & 3, \ \mathbb{L}_2 = \{x | x < 1\} = (-\infty, 1) \end{array}$$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 1) \cup [3, \infty)$

c.) $|3x - 6| \leq x + 2$

$$\begin{array}{lcrcl} \underline{\text{1. Fall}}\ x \geq 2 & : & 3x-6 & \leq & x+2 \\ & & 2x & \leq & 8 \\ & & x & \leq & 4,\ \mathbb{L}_1 = [2,4] \\ \underline{\text{2. Fall}}\ x < 2 & : & 6-3x & \leq & x+2 \\ & & 4 & \leq & 4x \\ & & x & \geq & 1,\ \mathbb{L}_2 = [1,2) \end{array}$$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [1, 4]$

d.) $x^2 - 5x + 4 < 0$

$\Leftrightarrow 0 > (x-4) \cdot (x-1)$

d.h. $(x - 4 < 0 \wedge x - 1 > 0) \vee (x - 4 > 0 \wedge x - 1 < 0)$

d.h. $(x < 4) \wedge (x > 1) \vee \underbrace{(x > 4 \wedge x < 1)}_{\text{leere Menge}}$

d.h. $(1 < x < 4)$

also $\mathbb{L} = (1, 4)$

e.) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$ (**Bernoullische Ungleichung**);

Für $n = 0, 1$ erweist sich die Ungleichung als trivial. Für $n \geq 2$ betrachtet man die linke Seite als n Faktoren und schätzt von links das Produkt von jeweils zwei Faktoren geschickt ab:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n \text{ Faktoren}} \\
&= (1+2x+x^2)\underbrace{(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n-2 \text{ Faktoren}} \geq (1+2x)\underbrace{(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n-2 \text{ Faktoren}} \\
&\geq (1+3x+2x^2)\underbrace{(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n-3 \text{ Faktoren}} \geq (1+3x)\underbrace{(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n-3 \text{ Faktoren}} \\
&\geq \ldots \\
&\geq (1+(n-1)x)\,(1+x) \\
&\geq 1 + nx + (n-1)x^2 \geq 1 + nx
\end{aligned}$$

Die Bernoullische Ungleichung ist von genereller Bedeutung und wird bei vielen Abschätzungen genutzt.

9 Summenformeln

9.1 Die Summenschreibweise

Bei der Addition mehrerer Summanden führt man zur abkürzenden Schreibweise das sogenannte Summenzeichen ein: Für n reelle Zahlen ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

stellt man deren Summe mithilfe des Summenzeichens dar:[2]

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ = \ a_1 \ + \ a_2 \ + \ \ldots \ + \ a_n$$

Beispiele:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2+i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 50^2 = \sum_{k=1}^{50} k^2$$

$$\sum_{k=1}^{20} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{20}$$

In dem Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

heißt der Index i Summationsindex, die Indexwerte 1 und n sind die untere - und die obere Summationsgrenze. Man beachte, dass die untere Summationsgrenze einen anderen ganzzahligen Wert als 1 annehmen kann. Ein häufig vorkommender Wert der unteren Summationsgrenze ist Null. Ist der Wert der unteren Summationsgrenze größer als der der oberen, so handelt es sich um eine leere Summe. Die leere Summe ist eine Summe ohne Summanden, ihr wird der Wert Null zugeordnet.

Bedeutsam für den Umgang mit dem Summenzeichen sind die folgenden **Regeln**[3] ($n, m \in$

[2] Die a_i sind indizierte Unbestimmte, i ist der Index, die Indexwerte sind hier $1, 2, 3, \ldots, n$.
[3] Diese Regeln gelten entsprechend für eine beliebige untere Summationsgrenze.

$\mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$):

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{(Aufteilung)}$$

$$2) \qquad \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_i) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{(Ausmultiplizieren)}$$

$$3) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \quad \text{(gliedweises Addieren)}$$

$$4) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+l}^{n+l} a_{i-l} \quad \text{(Indexverschiebung um } l \in \mathbb{Z})$$

Man beachte, dass das Summenzeichen nur eine verkürzende Schreibweise für Summen darstellt, jedoch noch keine Berechnung der Summe an sich bietet. Einige Summen lassen sich aber per Hand berechnen. Man berechne beispielsweise

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^{20} 2 = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 = 20 \cdot 2 = 40$$

9.2 Wichtige Summenformeln

Für viele Summen gibt es in der Mathematik jedoch Formeln zur direkten Berechnung. Die vielleicht berühmteste Summenformel ist die **Summierung der natürlichen Zahlen** von 1 bis n, die von Gauß herrührt. Sie lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Zum Nachweis addiert man die Summe einmal vorwärts und einmal rückwärts und fasst die entstehenden Summen zusammen. Bezeichnet man mit S_n die zu berechnende Summe, also $\sum_{i=1}^{n} i = S_n$, so gilt für $2S_n$:

$$2S_n = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = \sum_{i=1}^{n} (i + n - i + 1) = \sum_{i=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$$

Teilt man durch 2, so entsteht obige Formel.
Man berechne nun auf diese Weise:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Ein weiterer Nachweis dieser Summenformel gelingt mithilfe des Ansatzes

$$(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$$

Addiert man beidseitig von $i = 1, \ldots, n$, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

also

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_n + n \quad \Rightarrow n^2 + n = 2S_n \quad \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Obiger Ansatz ist verallgemeinerungsfähig. Es soll so eine Summenformel für die Quadratzahlen hergeleitet werden, also

$$S_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = ?$$

Dazu dient der folgende Ansatz

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$$

Summation über $i = 1, ..., n$ ergibt diesmal:

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3 \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

also

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_{n,2} + 3S_n + n$$

Mit der bekannten Summe S_n finden wir

$$\begin{aligned} S_{n,2} &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{2(n+1)^3 - 2 - 3(n+1)n - 2n}{2} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt somit die **Summenformel für die Quadratzahlen** ($n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Um eine Summenformel der Kubikzahlen

$$S_{n,3} = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

herzuleiten, kann man den im Eponenten um 1 erhöhten Ansatz

$$(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$$

wählen. Summation und Ausnutzen der schon vorhandenen Summenformeln führt dann zur Formel

$$S_{n,3} = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Weiterhin sehr wichtig ist die sogenannte **geometrische Summe**, also die Summe der Potenzen einer reellen Zahl q. Es gilt für $q \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Der Nachweis hierfür gelingt in ähnlicher Weise. Man setzt $G_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$ und berechnet geschickt $G_n(1-q)$:

$$G_n(1-q) = G_n - G_n q = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=1}^{n+1} q^i = 1 - q^{n+1}.$$

Division durch den Faktor $1-q$ liefert das Ergebnis.

Beispiele Man berechne folgende Summen:

1. $\sum_{i=0}^{100} 2^i = 1 + 2 + 4 + ... + 2^{100} = ?$
   Mit der geometrischen Summenformel ($q = 2$) findet man:
   $\sum_{i=0}^{100} 2^i = \frac{1-2^{101}}{1-2} = 2^{101} - 1$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{2^{100}}$

Die Summe entspricht dem Ausdruck $\sum_{i=1}^{100}(-1)^{i+1}\frac{1}{2^i} = -\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{-1}{2}\right)^i$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{100}\left(\frac{-1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{1}{3}(1-2^{-100})$$

Bisweilen erscheint die geometrische Reihe auch in einer anderen Form. So ergibt sich beispielsweise nach einer Umstellung für $q \to x$ und $n+1 \to n$:

$$x^n - 1 = (x-1)\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right)$$

10 Fakultät, Binomialkoeffizienten und Binomischer Lehrsatz

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird die Fakultät definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Die Fakultät gibt die Anzahl der Permutationen (Anordnungen) von n verschiedene Elementen an.

Beispiele:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\frac{12!}{10!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10} \cdot 11 \cdot 12}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10}} = 11 \cdot 12 = 132$$

$$\frac{n!}{k!} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \text{ für } n, k \in \mathbb{N},\ k < n.$$

Gebräuchlich ist auch die rekursive Eigenschaft:

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

Hinweis:
Die Fakultät ist mit wachsendem n eine sehr stark ansteigende Funktion. Sie wächst stärker als jede Potenz. So ist etwa

$10! = 3.628.800$

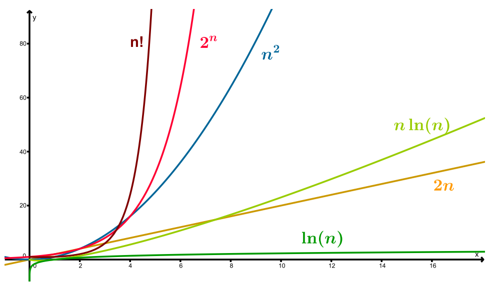
$20! = 2432902008176640000 = 2.43290201\ldots \cdot 10^{18}$

$100! = 9.33262154 \cdot 10^{157}$

$1000! \approx 4 * 10^{2567}$

Hingegen: $\ln(1000!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3. \cdot \ldots \cdot 1000) = \sum_{i=1}^{1000} \ln(i) \approx 5912,1$

Einen kurzen Überblick über die Komplexität der Fakultät im Vergleich zu anderen Funktionen liefert folgende Abbildung



Wir betrachten nun Verallgemeinerungen der binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{aligned}$$

Um die auftretenden Koeffizienten der Potenzen zu beschreiben, definieren wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{\text{abfallend}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}_{\text{aufsteigend}}}, k \geq n$$

Beispiele:

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21, \quad \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 5, \quad \binom{5}{1} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 5, \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 10$$

Immer gilt offensichtlich:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, n \in \mathbb{N}$$

Drei Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

a.) Umrechnung in Fakultäten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} \\
&= \frac{\overbrace{(n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}^{=n!}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}_{k!} \cdot \underbrace{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}_{=(n-k)!}} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}
\end{aligned}$$

b.) Symmetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Aus a.)

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

c.) Rekursive Additionseigenschaft:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Aus a.)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
&= \frac{\cancel{n!\cdot k} + n!\cdot(\cancel{n-k}+1)}{k!\cdot(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Die Eigenschaften b.) und c.) der Binomialkoeffizienten ermöglichen die Darstellung als Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten können wir nun die Potenz $(a+b)^n$ berechnen. Die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten entsprechen genau den Eigenschaften der oben beschriebenen Vorfaktoren, und wie sich zeigen lässt nicht nur bis $n = 5$, sondern für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch die gemeinsamen Eigenschaften ist sicher gestellt, dass die Vorfaktoren genau den Binaomialkoeffizienten entsprechen.

Es gilt somit der sogenannte **Binomische Lehrsatz**

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i
\end{aligned}$$

Für $n = 2$ ergibt sich die schon bekannte binomische Formel.

Bemerkungen

a.) Es gilt:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = (b+a)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} a^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{n-i}}_{\binom{n}{j}} b^i a^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\end{aligned}$$

b.) Weiterhin gilt:

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-1} \underbrace{(-b)^i}_{(-1)^i b^i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

c.) Setze man $a = b = 1$, dann erhält man:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

d.) Setze man $a = 1$ und $b = -1$, dann erhält man:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 1^{n-i} \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$$

e.) Setze man $a = 1$ und $b = x$, dann erhält man:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i, x \in \mathbb{R}$$

11 Vektorrechnung

11.1 Grundbegriffe

Ein dreidimensionaler Vektor ist ein Tripel reeller Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ der Form

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen a_1, a_2, a_3 heißen Komponenten oder Koordinaten des Vektors.

Beispiele

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 50\text{ km/h} \\ 60\text{ km/h} \\ 70\text{ km/h} \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 5\text{ N} \\ 3\text{ N} \\ 7\text{ N} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**. Die Menge aller 3-dim. Vektoren ist:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dabei gelten für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ folgende Rechenoperationen:

1.) Addition zweier Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.) Skalare Multiplikation

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt: $$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Beispiele

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 48 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-5\\-15\end{pmatrix}$$

3.) Negation

Der zu Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ negierte Vektor lautet

$$-\vec{a}=(-1)\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

Offensichtlich gelten folgende Regeln für den Nullvektor:
$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0},\ \ \vec{a}+\vec{0}=\vec{a},\quad s\,\vec{0}=\vec{0}.$

Beispiel

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\quad -\vec{a}=(-1)\,\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

4.) Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\in\mathbb{R}$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}=2\cdot1+(-1)\cdot0+3\cdot(-4)=2+0-12=-10$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=2\cdot2+(-1)\cdot(-1)+3\cdot3=2^2+(-1)^2+3^2=14$$

Offensichtlich gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\underbrace{a_1^2+a_2^2+a_3^2}_{\geq0}=\vec{a}^2$$

5.) Betrag

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

Der Betrag eines Vektors steht im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst. Es gilt:

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Obige Vektoroperationen kommen in Ausdrücken häufig kombiniert vor. Zur Übung folgen dazu einige Beispiele.

Übungen

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man berechne

a) $(2\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -16$

b) $|3\vec{b} - \vec{c}| \cdot \vec{a} = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \sqrt{16 + 121 + 256} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{393} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $(\underbrace{2|\vec{a}|}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\vec{b}}_{\in \mathbb{R}^3})\vec{c}$ geht nicht!

d) $-\vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -5 + (-2) = -7$

e) $3\vec{a} + 7\vec{x} = 4\vec{c} \qquad \vec{x} = ?$

Auflösung nach $\vec{x}$ ergibt $7\vec{x} = 4\vec{c} - 3\vec{a} \;\Big|\; \cdot \frac{1}{7}$, also:

$$\vec{x} = \frac{1}{7}(4\vec{c} - 3\vec{a}) = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hinweise:

1.) Weitere Dimensionen
Sowohl die Vektordefinition als auch die obigen Operationen lassen sich ohne Probleme auf beliebige Dimensionen übertragen:

$$\underline{n = 2} : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \qquad s\vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Beispiel

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\underline{n \in \mathbb{N}} : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}; \quad s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ sa_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \in \mathbb{R}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}$$

2.) Standardeinheitsvektoren

Die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ heißen Standardeinheitsvektoren.

Für jeden Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt die Zerlegung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

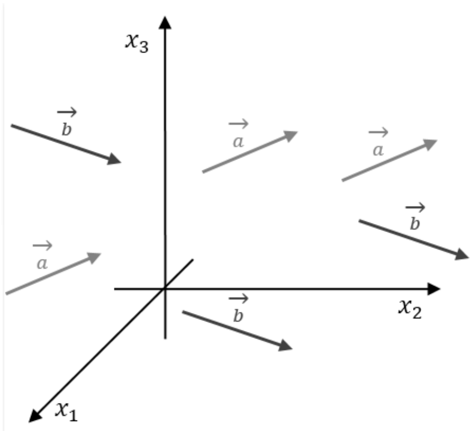
11.2 Geometrische Deutung

1.) Vektoren

Vektoren werden in der Geometrie in zweifacher Hinsicht genutzt, und zwar als:

a) Richtungsvektor

Ein Richtungsvektor stellt eine Menge „parallel gleicher“ Pfeile dar. Er besitzt eine Richtung und eine Länge.



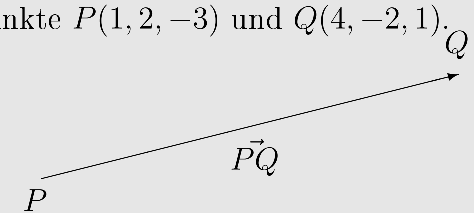
Jeder Pfeil repräsentiert „seinen“ Vektor. Die Komponenten des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

ergeben sich als Differenz der Koordinaten Endpunkt - Anfangspunkt eines Pfeils. Diese Differenz ist für alle parallel gleichen Pfeile dieselbe.

Beispiel

Gegeben sind die Punkte $P(1, 2, -3)$ und $Q(4, -2, 1)$.



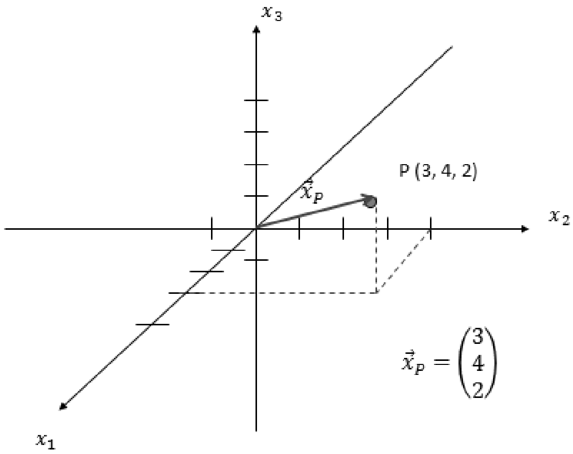
Der Pfeil von P nach Q beschreibt den Richtungsvektor

$$\vec{a} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Man gebe zwei weitere Punkte, deren Verbindungspfeil denselben Vektor $\vec{a}$ repräsentieren.

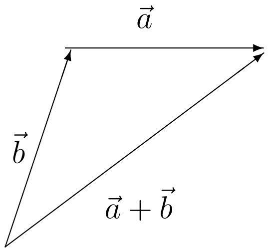
b) Ortsvektor

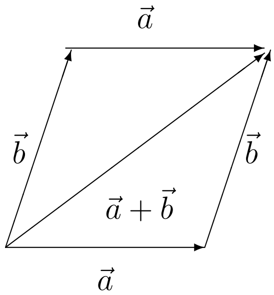
Durch Ortsvektoren werden Punkte im Raum dargestellt. Der Ortsvektor besitzt dieselben Koordinaten wie der entsprechende Punkt.
So wird ein Punkt $P(p_1, p_2, p_3)$ beschrieben durch den Ortsvektor
$\vec{x}_P = \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.
Er wird visualisiert durch einen Pfeil mit dem Nullpunkt als Anfangspunkt.



2.) Addition

Der Ergebnisvektor einer Addition $\vec{a} + \vec{b}$ lässt sich als Aneinanderlegen von Pfeilen visualisieren. Verschiebt man Pfeilrepräsentant des Vektors $\vec{b}$ so, dass der Anfangspunkt von $\vec{b}$ mit dem Endpunkt des Pfeils von Vektor $\vec{a}$ übereinstimmt, dann ergibt sich ein Repräsentant des Additionsvektors, indem man den Anfangspunkt von $\vec{a}$ mit dem Endpunkt des verschobenen Pfeils von Vektor $\vec{b}$ verbindet.

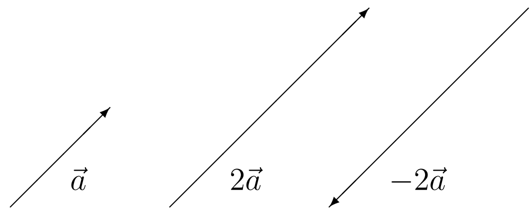




$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}=\vec{c}$$

3.) Skalare Multiplikation

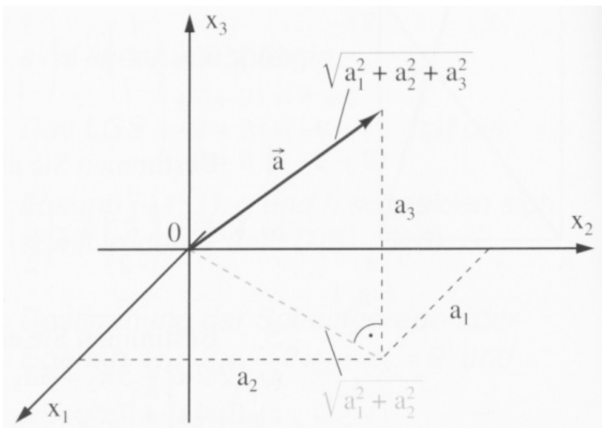
Die skalare Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl s führt dazu, dass der entsprechende Pfeil um den Faktor $|s|$ länger oder kürzer wird. Ist s negativ, zeigt der Ergebnispfeil in die entgegengesetzte Richtung.



$$s\cdot\vec{a}=s\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$$

4.) Betrag

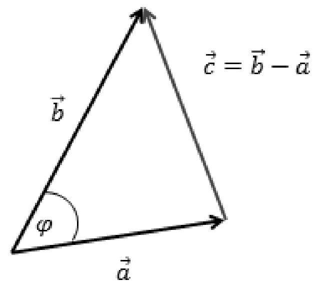
Der Betrag einer Vektors gibt nach Pythagoras genau die Länge der Pfeilrepräsentanten des Vektors an.



$$|\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

5.) Skalarprodukt

Die Bedeutung des Skalarproduktes $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ ergibt sich durch die Betrachtung eines Vektordreiecks mit den Seiten $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$.



Die Seitenlängen sind die Beträge der Vektoren $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$, für die der Kosinussatz gilt:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi$$

φ ist dabei der Winkel zwischen den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Andererseits gilt für die Länge des Vektors $\vec{c}$:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}^2 \underbrace{-\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b}}_{-2\vec{a}\cdot\vec{b}} + \vec{a}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Wegen $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ und $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ ergibt sich im Vergleich der Formeln für $|\vec{c}|^2$:

$$-2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Der Wert des Skalarproduktes sagt somit insbesondere etwas über den Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus. Dieser Winkel lässt sich somit über seinen Kosinuswert mithilfe des Skalarproduktes berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right), \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

Beispiele

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-5}{\sqrt{26}\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{5}{26}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{26}}\right) \approx 120,74...°$$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = 90°$$

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander ($\vec{a} \perp \vec{b}$)und heißen **orthogonal**, falls gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Beispiel

a.) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$

b.) Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Gesucht ist ein $\vec{b}$ mit $\vec{b} \perp \vec{a}$

z. B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Weiterhin möglich sind: $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hinweise:

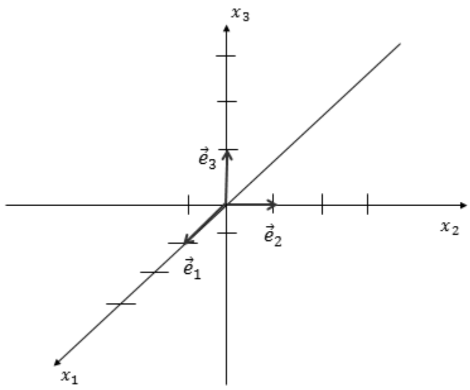
1) Standardeinheitsvektoren
Die Standardeinheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ besitzen die Länge 1 d.h.

$$|\vec{e}_i| = 1, \quad i = \{1, 2, 3\}$$

und sind paarweise orthogonal, d.h. es gilt:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

bzw. allgemein: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ für $i, j = 1, 2, 3$



2) Parallelität
$\vec{a}$ ist parallel zu $\vec{b}$, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\vec{a} = s\vec{b}$, $\quad s \neq 0$
Schreibweise: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; nicht parallel: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$: $\qquad \vec{a} = s\vec{b}$ mit $s = -\frac{1}{2}$

3) Normierung

Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}$. Der Vektor in Richtung von $\vec{a}$ mit Länge 1 lautet:

$$\vec{a}_n = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Dann ist nämlich:

$$|\vec{a}_n| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

Generell heißt ein Vektor der Länge 1 Einheitsvektor.

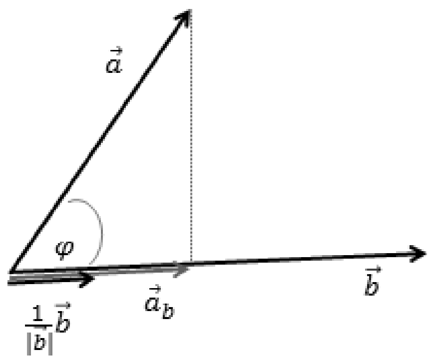
Beispiel Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Der auf 1 normierte Vektor lautet: $\vec{a}_n = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektor in gleicher Richtung mit Länge 4: $\vec{a}_4 = 4 \cdot \vec{a}_n = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) Projektion

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Wir bestimmen die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$:



Der Projektionsvektor $\vec{a}_b$ besitzt die Länge $|\vec{a}_b| = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ sowie die Richtung von Vektor $\vec{b}$: $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Also gilt lautet die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$:

$$\vec{a}_b = |\vec{a}_b|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$

Analog gilt für die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$:

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

Beispiel

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\right|^2}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right|^2}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$$

11.3 Folgerung und Rechenregeln

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gelten folgende Rechenregeln, die es bei der Umformung vektorieller Terme zu berücksichtigen gilt.

1.) Gesetze für die Addition

a) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

b) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

c) Es gibt für einen Vektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$, sodass für alle Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}$ gilt: $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$

d) Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen (negativen) Vektor $-\vec{a}$, so dass gilt: $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$

2.) Gesetze für die skalare Multiplikation $(s, t \in \mathbb{R})$

a) $s(\vec{a}+\vec{b}) = s\vec{a}+s\vec{b}$

b) $(s+t)\vec{a} = s\vec{a}+t\vec{a}$

c) $(st)\vec{a} = s(t\vec{a})$

d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Hinweise:

- Diese Gesetze lassen sich durch Einsetzen und Vergleich linker und rechter Seite verifizieren.
- Genügt eine Menge V von Elementen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}, ... \in V$ mit zwei gegebenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ obigen Gesetzen 1.) a) - d) und 2.) a) - d), so heißt diese Menge **Vektorraum** $(V, +, \cdot)$ über $\mathbb{R}$.
- Ein Vektor $\vec{a} \in V$ ist in dem Sinne dann ein Element aus einem Vektorraum.
- Die Menge $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \; a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}$ ist mit den üblichen Operatoren $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
- Aus obigen Gesetzen können weitere gefolgert werden, z.B.: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, denn:

$$\begin{aligned} 0\vec{a} = (0+0)\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a} \;\; &\big| - 0\vec{a} \\ \Rightarrow 0\vec{a} - 0\vec{a} = (0\vec{a} + 0\vec{a}) - 0\vec{a} & \\ \vec{0} = 0\vec{a} & \end{aligned}$$

3.) Gesetze zum Betrag

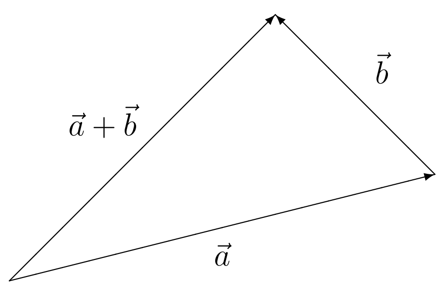
a) $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$

b) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ **(Dreiecksungleichung)**

b) gilt z.B., denn:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= \vec{a}^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \underbrace{\cos\varphi}_{\leq 1} + \vec{b}^2 \\ &\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung ist schon für reelle Zahlen bekannt, rechtfertigt aber erst im Zusammenhang mit Vektoren ihren Namen: Die Dreiecksungleichung besagt, dass bei einem Dreieck eine Seite höchstens so lang ist wie die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.



4.) Gesetze für das Skalarprodukt

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

c) $s(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (s\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s\vec{b})$

d) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ **(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**

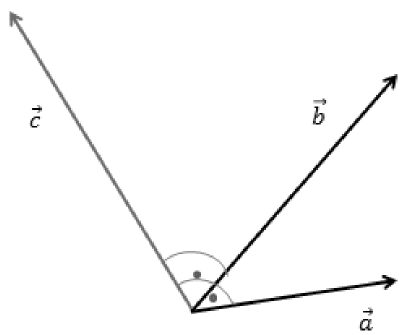
d) gilt z.B., denn:
$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos\varphi| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

In Komponenten lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

11.4 Vektorprodukt, $n = 3$

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{c}$, der auf beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, d. h. für den gilt: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$. Geometrisch ist klar, dass ein Vektor $\vec{c}$ existiert und bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig ist, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind.



Die Orthogonalitätsforderung an $\vec{c}$ läßt sich mithilfe des Skalarproduktes ausdrücken:

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben in ihren Komponenten ein lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten c_1, c_2, c_3:

$$\begin{array}{rl} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & = 0 \ \mid \ \mathrm{I} \\ b_1c_1 + \ b_2c_2 + b_3c_3 & = 0 \ \mid \mathrm{II} \\ \text{-------------} & \text{------} \\ (b_1a_2 - a_1b_2)c_2 + (b_1a_3 - a_1b_3)c_3 & = 0 \ \mid \ b_1\mathrm{I} - a_1\mathrm{II} \end{array}$$

Wir wählen als eine mögliche Lösung:

$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Für c_1 ergibt sich dann aus Gleichung I:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

In vektorieller Schreibweise erhält man als Lösung das sogenannte Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Zur Bestimmung berechnet man für jede Komponente die Differenz von Produkten über Kreuz gemäß:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Für das Kreuzprodukt gelten folgende Rechenregeln:

1.) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2.) $(s\vec{a}) \times \vec{b} = s(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (s\vec{b})$

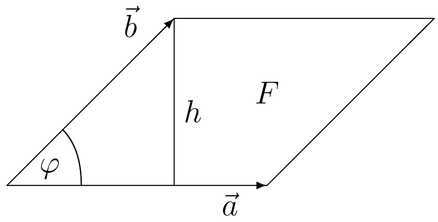
3.) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

4.) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0, \ \ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

5.) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi, \ \ \varphi \in [0, 180°]$ Diese Regeln verifiziert man durch Einsetzen der Definition und Vergleich von linker und rechter Seite. Eigenschaft 5.) ist etwas schwieriger:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= \left|\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\right|^2 \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2 \\
&= \ldots \;=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2\varphi 2 \\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\underbrace{(1-\cos^2\varphi)}_{\sin^2\varphi}
\end{aligned}$$

Eigenschaft 5.) verdeutlicht, dass der Betrag des Kreuzproduktes gleichtzeitig den Flächeinhalt F des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms darstellt.



Gemäß Zeichnung gilt nämlich für den Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$F=h\cdot||\vec{a}|| \;=\; ||\vec{a}||\cdot\underbrace{||\vec{b}||\cdot|\sin\varphi|}_{h} \;=\; |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,\underbrace{|\vec{b}|\sin\varphi}_{h}$$

Beispiel

Wie groß ist der Flåcheninhalt des von $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ erzeugten Parallelogramms?

$$F=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}1-9\\-6-(-2)\\6-2\end{pmatrix}|=|\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}|$$

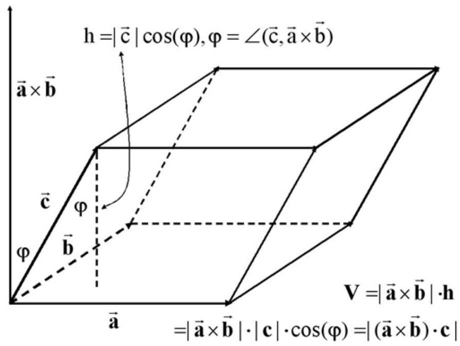
$$=4|\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}|=4\sqrt{6}$$

6.) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (BAC-CAB-Formel)

Die BAC-CAB-Formel dient zur Berechnung des doppelten Kreuzproduktes. Ihr Nachweis gelingt durch Vergleich linker und rechter Seite.
Insbesondere gilt für das Kreuzprodukt nicht das Assoziativgesetz.

7.) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cdot \cos\varphi$ (Spatprodukt, $\varphi = \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$)

Das Spatprodukt gibt (bis auf das Vorzeichen) das Volumen des von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats wieder.



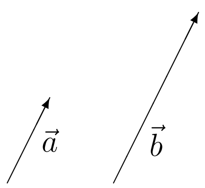
8.) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen rechtsorientiert (bilden ein Rechtssystem, falls $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$)
Ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, so heißen sie linksorientiert (entspricht der Korkenzieherregel oder Rechte-Hand-Regel).

Beispiel

- $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bilden ein Rechtssystem, da $(\vec{e_1} \times \vec{e_2}) \cdot \vec{e_3} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_3} = 1 > 0$
- $\vec{a}, \vec{b},\ \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem, da $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0$

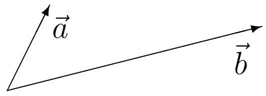
11.5 Lineare Unabhängigkeit

11.5.1 Einführung



$\Rightarrow \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besitzen dieselbe Richtung; aus diesem Grund läßt sich der eine Vektor als Vielfaches des anderen darstellen. Man sagt in diesem Fall: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear** oder **linear abhängig**.

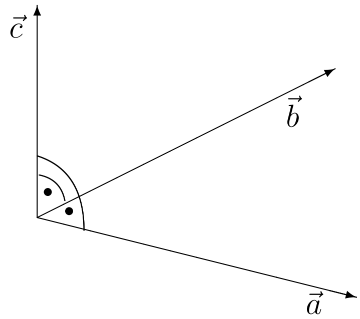


Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besitzen unterschiedliche Richtungen, bei ihnen besteht daher **keine** Beziehung der Form $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$. Die Vektoren $\vec{a}$ sind nicht kollinear, sondern sie sind **linear unabhängig.** Sie sind jedoch noch **komplanar**, das heißt sie liegen in einer Ebene.

Auf ähnliche Weise folgt für die drei Vektoren aus der Zeichnung: Es gibt keine Darstellung der Art

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \qquad (3)$$

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen in einer Ebene, der Vektor $\vec{c}$ ragt aus dieser Ebene heraus.



Auch hier gilt: Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **linear unabhängig**. Um dieses auszudrücken, ist eine Schreibweise der Form (3) ungeeignet. Man wählt eine Formulierung, in der die vorkommenden Vektoren in "gleichberechtigter Form" erscheinen. Dieses ist Inhalt der folgenden sehr wichtigen und grundlegenden Begriffsbildung.

11.5.2 Linear unabhängige Vektoren, Linearkombination

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, falls eine Gleichung mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist.

Ist hingegen eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

erfüllt, bei der mindestens ein λ_i mit $\lambda_i \neq 0$ vorhanden ist, so heißen $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **linear abhängig**.

Die Ausdrücke, die in der Definition der linearen Unabhängigkeit erscheinen, werden auch an anderer Stelle häufig vorkommen; man gibt ihnen daher einen Namen.

Ein aus $n \in \mathbb{N}$ Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ und n reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gebildeter Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$$

heißt **Linearkombination** der $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Bemerkungen:

1. Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **linear abhängig**, so läßt sich mindestens einer dieser Vektoren durch die übrigen darstellen. Genauer gilt: mindestens ein Vektor läßt sich durch eine Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen.

   Wegen der linearen Abhängigkeit der $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ besteht eine Gleichung der Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$, bei der mindestens ein Koeffizient λ_i von Null verschieden ist. Der zugehörige Vektor $\vec{a}_i$ ist dann gleich einer Linearkombination der übrigen Vektoren.

   Ist beispielsweise $\lambda_1 \neq 0$, so ist eine Teilung durch λ_1 möglich, und man kann die Gleichung

   $$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0} \qquad (\lambda_1 \neq 0)$$

   nach $\vec{a}_1$ auflösen: $\vec{a}_1 = \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) \vec{a}_i$

2. Ein einzelner Vektor $\vec{a}$ ist genau linear abhängig, wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist; es gilt nämlich:

   $$\vec{a} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \cdot \vec{a} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \neq 0$$

   $$\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \vec{a} = 0$$

3. Befindet sich unter den Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ der Nullvektor, so sind diese Vektoren linear abhängig. Ist etwa $\vec{a}_1 = 0$, so gilt:

   $$1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = 0$$

   Der Koeffizient von $\vec{a}_1$ ist hier von Null verschieden.

Beispiele
Man prüfe die jeweils gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

1. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Die Vektoren sind linear unabhängig, da aus dem Ansatz $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

   Die Vektoren sind linear abhängig, da: $-11 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$

3. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$

   Der Ansatz $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ führt zu einem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

   Gaußalgorithmus führt zu dem vereinfachten System $\begin{array}{cccl} 1 & 3 & -1 & \mid 0 \\ \color{red}{0} & -4 & 4 & \mid 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 0 & \mid 0 \end{array}$, welches unendlich viele Lösungen besitzt, auch nicht-triviale, z. B. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also linear abhängig.

4. $\vec{a} = \begin{pmatrix}8\\2\\10\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$

   $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig, da $1 \cdot \begin{pmatrix}8\\2\\10\end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

5. $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}$

   Der Ansatz $\lambda_1 \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ führt zu einem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + 1\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

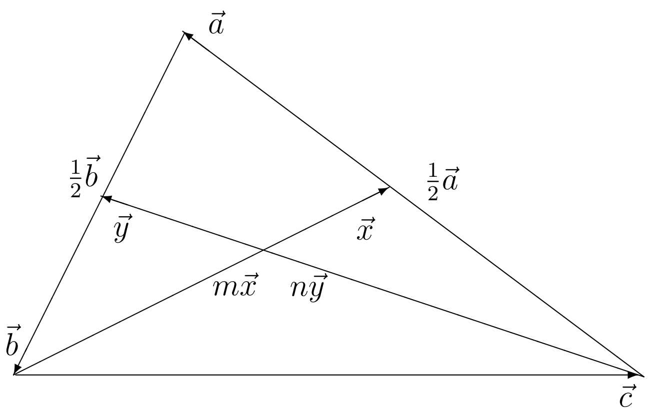
   Gaußalgorithmus führt zu dem vereinfachten System

$$\begin{array}{cccl} 4 & 2 & -2 & \mid 0 \\ 0 & 4 & -6 & \mid 0 \\ 0 & -10 & 26 & \mid 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccl} 4 & 2 & -2 & \mid 0 \\ 0 & 4 & -6 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 22 & \mid 0 \end{array},$$

welches nur dir triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also linear unabhängig.

Es folgt ein weiteres **Beispiel** für die Verwendung der linearen Unabhängigkeit: Es soll gezeigt werden, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis 2 : 1 schneiden.

Hierzu wird ein Dreieck durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.
Die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stellen die Seitenhalbierenden auf die Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



Die Abschnitte auf den beiden Seitenhalbierenden von den Eckpunkten bis zu deren Schnittpunkt entsprechen den Vektoren $m \cdot \vec{x}$ und $n \cdot \vec{y}$. Die Behauptung ist gezeigt, wenn man

$$m = n = \frac{2}{3}$$

hergeleitet hat. Dazu werden einige Gleichungen mit Hilfe der Zeichnung aufgestellt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{c} = -\vec{a} - \vec{b} \\
\vec{x} &= \vec{c} + \frac{1}{2}\,\vec{a} \\
\vec{y} &= \vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b} \\
m\,\vec{x} &= \vec{c} + n\,\vec{y}
\end{aligned}$$

In die letzte Gleichung werden für $\vec{c}$, $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die drei ersten Gleichungen eingesetzt:

$$-m\,\vec{a} - m\,\vec{b} + \frac{1}{2}m\,\vec{a} = -\vec{a} - \vec{b} + n\,\vec{a} + \frac{1}{2}n\,\vec{b}$$

Alle Glieder werden auf die rechte Seite dieser Gleichung gebracht, anschließend werden die Summanden mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
& -m\,\vec{b} - \tfrac{1}{2}m\,\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} - n\,\vec{a} - \tfrac{1}{2}n\,\vec{b} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \left(1 - \tfrac{1}{2}m - n\right)\vec{a} + \left(1 - \tfrac{1}{2}n - m\right)\vec{b} = 0
\end{aligned}$$

Da die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der letzten Gleichung gleich Null:

$$\left.\begin{array}{rcl} 1-\frac{1}{2}m-n &=& 0 \\ 1-\frac{1}{2}n-m &=& 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}m+\;n &=& 1 \\ m+\frac{1}{2}n &=& 1 \end{array}\right.$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem in den unbekannten Werten m und n, so erhält man als eindeutige Lösung

$$m = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad n = \frac{2}{3}$$

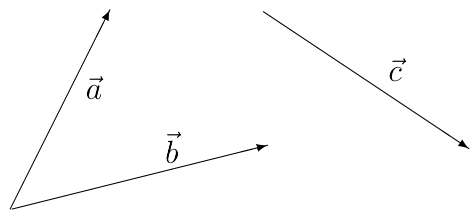
Damit ist die Behauptung gezeigt.

11.5.3 Dimension, Basis, Komponentendarstellung

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ die maximale Anzahl zueinander linear unabhängiger Vektoren, so heißt dieses n die **Dimension** des zugehörigen Vektorraums. Beispiel[4]

- In der Ebene gilt $n = 2$.
- Im (Anschauungsraum-) Raum gilt $n = 3$.

In der Ebene seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vorgegeben. Weiterhin sei ein beliebiger Vektor $\vec{c}$ gegeben:



Das es sich um drei Vektoren handelt und andererseits aus Dimensionsgründen nur höchstens zwei Vektoren voneinander linear unabhängig sein können, müssen diese drei Vektoren linear abhängig sein, d. h. es besteht eine Gleichung

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = 0$$

bei der mindestens einer der drei Koeffizienten λ, μ und ν von Null verschieden ist. Insbesondere ist $\nu \neq 0$; wäre nämlich $\nu = 0$, so verbliebe die Gleichung

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = 0$$

[4] Begründungen folgen

bei der nach wie vor ein Koeffizient ungleich Null ist, d. h. $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$ ist; dieses ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} & \nu \neq 0 \\ \Rightarrow\ & \vec{c} = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) \cdot \vec{a} + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right) \cdot \vec{b} \\ \Rightarrow\ & \vec{c} \ \text{ wird durch Linearkombination von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ dargestellt} \end{aligned}$$

Da sich ein beliebiger Vektor $\vec{c}$ aus der Ebene so darstellen ließ, bilden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusammen eine sogenannte **Basis** der Ebene. Allgemeiner gilt:

Sind Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ mit

1. jeder Vektor $\vec{c}$ läßt sich als Linearkombination der $\vec{a}_i$ darstellen:

$$\vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \tag{4}$$

2. die Vektoren $\vec{a}_i$ sind linear unabhängig,

gegeben, so heißen die $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ **Basis** des zugehörigen Vektorraums.

Frage: Warum ist die Darstellung (4) eines Vektors durch eine Basis eindeutig?

Antwort: Angenommen, man hat zwei Darstellungen von $\vec{c}$:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \\ \vec{c} &= \mu_1 \cdot \vec{a}_1 + \mu_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \vec{a}_n \end{aligned}$$

Die Subtraktion beider Darstellungen voneinander liefert:

$$\vec{c} = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot \vec{a}_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{a}_n$$

Da die $\vec{a}_i$ eine Basis bilden, sind sie linear unabhängig. Die Koeffizienten sind daher Null:

$$(\lambda_2 - \mu_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \mu_2 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

Es handelt sich also beide Male um dieselbe Darstellung von $\vec{c}$ durch die Basis $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.

Bemerkung:

$$n = \text{Anzahl der Basisvektoren} = \begin{array}{l}\text{maximale Anzahl der linear} \\ \text{unabhängigen Vektoren}\end{array}$$

Beispiel:

- Ebene: Anzahl Basisvektoren=Dimension= 2.
- (Anschauungs-) Raum: Anzahl Basisvektoren=Dimension= 3.

Um dieses begründen zu können, benötigt man eine andere Sicht auf die Komponentendarstellung von Vektoren.

Um zu zeigen, dass die Dimension tatsächlich zwei beträgt, gibt man eine Basis der Ebene der Länge zwei an. Eine solche Basis ist die **Standardbasis**, bestehend aus den beiden Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man zeigt leicht, dass diese beiden Vektoren linear unabhängig sind; außerdem stellen sie jeden beliebigen Vektor der Ebene dar:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$$

Auf die gleiche Art zeigt man, dass der Raum die Dimension drei besitzt. Auch hier bilden die drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Standardbasis. Einen beliebigen räumlichen Vektor stellt man damit als Linearkombination dar: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$

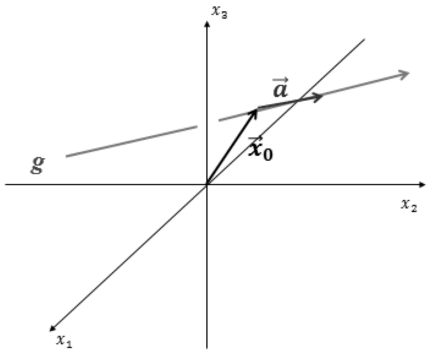
11.6 Elemente der analytischen Geometrie

11.6.1 Geraden im $\mathbb{R}^3$

Eine Gerade ist eine Teilmenge des Raumes und enthält die Punkte mit dem Ortsvektor $\vec{x}$, für die gilt:

$$g: \ \vec{x}(t) = \vec{x_0} + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Der Vektor $\vec{x}_0$ heißt Aufpunkt, der Vektor $\vec{a}$ Richtungsvektor der Geraden g; t heißt Parameter der Gerade. Man spricht auch von der Parameterdarstellung der Geraden. Genauer gesagt gilt $g = \{\vec{x} | \vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}, \ \ t \in \mathbb{R}\}$.



Beispiel

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}, \quad t \in \mathbb{R}$

1. Liegt der Punkt P$(0, 6, 3)$ auf der Geraden?

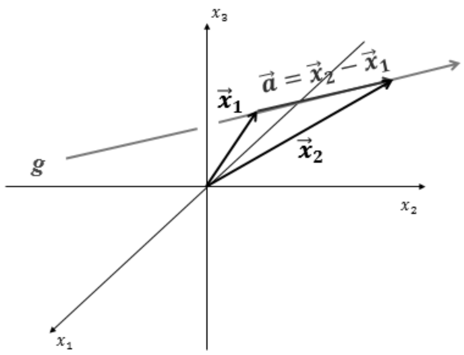
   Es muss in dem Fall dann einen Parameterwert t geben mit:
   $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $0 = -2 + t, \ 6 = 4 + t, \ 3 = 1 + t$
   Alle drei Glechungen müssen für ein t gelten. Dies ist offenbar für $t = 2$ der Fall. P liegt also auf der Geraden g, d.h. P$\in g$. In ähnlicher Weise zeigt man, dass der Punkt Q$(0, 6, 1)$ nicht auf der Geraden liegt, d.h. Q$\notin g$.

2. Wo schneidet die Gerade g die x_1, x_2-Ebene?

   $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + t \\ 4 + t \\ 1 + t \end{pmatrix}$
   Schnittpunkt ist dort, wo die x_3-Komponente 0 ist: $1 + t = 0, \quad t = -1$
   also: $\vec{x_s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zwei nichtgleiche Punkte bestimmen eindeutig eine Gerade. Sind die Punkte P_1 (Ortsvektor $\vec{x_1}$) und P_2 (Ortsvektor $\vec{x_2}$) gegeben, so lautet die Verbindungsgerade in Parameterdarstellung:

$$g : \ \vec{x} = \vec{x_1} + t(\vec{x_2} - \vec{x_1}) \qquad \text{(Zweipunktegleichung)}$$



Hinweis: Die Darstellung einer Geraden durch Einstiegsvektor und Richtungsvektor ist nicht eindeutig.

Beispiel
Beide Parameterdarstellungen bezeichnen dieselbe Gerade.

$$g : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$g : \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Für die Lage zwei gegebener Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$g_1 : \vec{x}(t) = \vec{x_1} + t\vec{a_1}$$

$$g_2 : \vec{x}(t) = \vec{x_2} + t\vec{a_2}$$

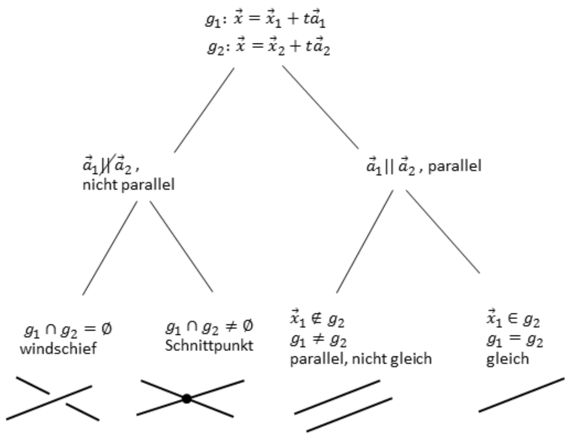
zueinander gibt es vier Möglichkeiten. Sie sind entweder

a) gleich, d.h. $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}, \quad \vec{x_1} \in g_2$ oder

b) parallel, aber nicht gleich, d.h. $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}, \; g_1 \cap g_2 = \emptyset$ (leere Menge) oder

c) einen Schnittpunkt besitzen, d.h. $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_2}, \; g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$ oder

d) sind windschief, d.h. $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_2}, \; g_1 \cap g_2 = \emptyset$



Beispiele

a) $g_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, also nicht parallel; suche möglichen Schnittpunkt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} t - 3s &= -1 && (1) \\ 2t - 4s &= -2 && (2) \\ t - 4s &= -1 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t - 3s &= -1 && (1) \\ 2s &= 0 && (2) - 2 \cdot (1) \\ -s &= 0 && (3) - (1) \end{aligned}$$

Ermittle: $s = 0$ und $t = -1$, somit Schnittpunkt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, nicht parallel, suche möglichen Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix};\quad t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$t+2s=-1\rightarrow t-\frac{2}{3}=-1,\ t=-\frac{1}{3}$

$-3s=1\rightarrow s=-\frac{1}{3}$

$3t-s=-1\rightarrow 3t+\frac{1}{3}=-1,\ t=-\frac{4}{9}\Rightarrow$ Widerspruch
g_1, g_2 sind windschief

c) $g_1:\ \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\5\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\quad P(1,2,-4)$

Gesucht: g_2 mit g_1 parallel zu g_2 und $P\in g_2$

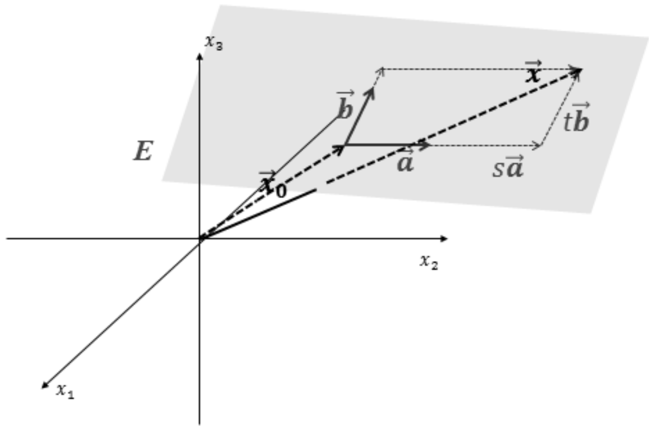
$$g_2:\ \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$$

11.6.2 Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Eine Ebene ist die Menge aller Punkte der Form

$$E:\vec{x}(s,t)=\vec{x_0}+s\vec{a}+t\vec{b},\quad s,t\in\mathbb{R}\qquad \text{(Parameterdarstellung einer Ebene)}$$

Man spricht von der Parameterdarstellung der Geraden. In Analogie zur Gerade heißt der Vektor $\vec{x_0}$ Aufpunktvektor der Geraden, die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Richtungsvektoren der Geraden; s und t sind die Parameter. Ausgehend vom Aufpunktvektor beschreiben die Richtungsvektoren die Lage der Ebene. Für jeden Punkt der Ebene existieren in eindeutiger Weise Parameterwerte s und t, sodass eine Darstellung des Ortsvektors des Punktes wie in obiger Weise angegeben möglich ist.



Wir können die Ebene auch direkt genauer als Menge schreiben:

$$\text{Genauer: } E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{x_0} + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s,t \in \mathbb{R}\right\}$$

Beispiel
a) Wie lautet die x_1, x_3-Ebene, die die x_2-Achse im Punkt P(0,3,0) schneidet, in Parameterdarstellung?

$$E : \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

b) Gegeben ist die Ebene $E : \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$
Frage: Liegt der Punkt $P(5,0,6)$ in der Ebene?

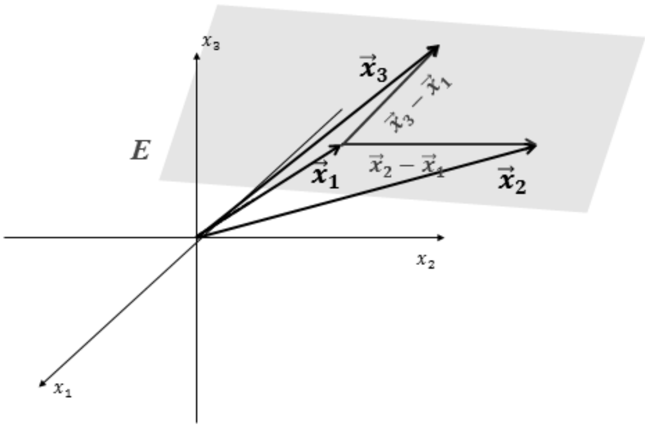
Zur Prüfung setzt man den Punkt als Punkt der Ebene an und versucht passende Parameterwerte zu finden:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, d.h. $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} s + t &= 5 \rightarrow s = 4 \\ -t &= -1 \rightarrow t = 1 \\ s + 2t &= 6 \rightarrow s = 4 \end{aligned}$$

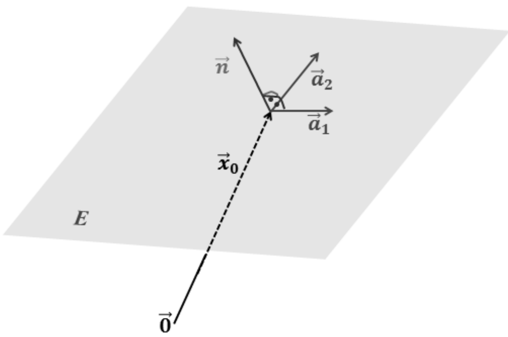
$\Rightarrow$ Alle 3 Gleichungen sind mit $s = 4, \ t = 1$ lösbar, also liegt P in E, d.h. $P \in E$.

Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist durch 3 Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ bestimmt. Sie besitzt die Parameterdarstellung:

$$E : \vec{x}(s,t) = \vec{x}_1 + s(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + t(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \qquad \text{(Dreipunktegleichung der Ebene)}$$



Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist auch dadurch bestimmt, dass ein Einstiegsvektor $\vec{x}_0$ und ein Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben sind.



Der Normalenvektor einer Ebene ist bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig und man findet ihn z. B. durch das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$. Aus $E: \ \vec{x} = \vec{x}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$ ergibt sich durch Multiplikation mit dem Normalenvektor:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot (\vec{x}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}) = \vec{n} \cdot \vec{x}_0 + s\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{a}}_{=0} + t\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{b}}_{=0}$$

Die zur Ebene gehörenden Punkte genügen eindeutig der (skalaren) Gleichung

$$E: \ \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}_0 = d \ \in \mathbb{R} \qquad \text{(parameterfreie Darstellung der Ebene)}$$

Mit einem Aufpunkt und einem Normalenvektor ist eine eben im $\mathbb{R}^3$ also eindeutig bestimmt. Die skalare Gleichung zur Chrakterisierung einer Ebene E kann man auch ganz ohne Vektoren formulieren: Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich nach Ausmultiplizieren des Skalarproduktes:

$$E: \; n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d \qquad \text{(Koordinatenform)}$$

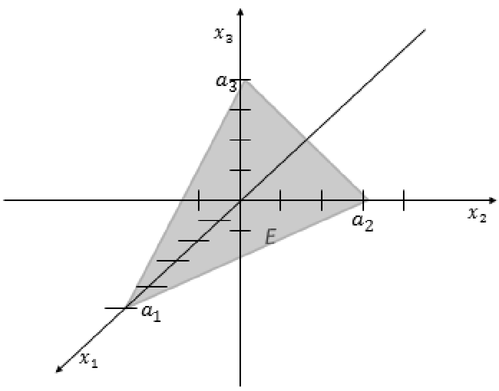
Mit $d \neq 0,\; n_1 \neq 0,\; n_2 \neq 0,\; n_3 \neq 0$ ist eine weitere Darstellung der Ebene möglich:

$$\frac{n_1}{d}x_1 + \frac{n_2}{d}x_2 + \frac{n_3}{d}x_3 = 1$$

$$\frac{x_1}{\frac{d}{n_1}} + \frac{x_2}{\frac{d}{n_2}} + \frac{x_3}{\frac{d}{n_3}} = 1$$

Mit $a_i = \frac{d}{n_i}$ für $i = 1, 2, 3$ findet man die Achsenabschnittsform einer Ebene

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1 \qquad \text{(Achsenabschnittsform einer Ebene)}$$



Beispiel

$E: \; \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R} \qquad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Parameterdarstellung)

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$ (parameterfreie Darstellung)

Schreibt man das Skalarprodukt in den Komponenten aus, so erhält man die Koordinatendarstellung der Ebene:

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -1, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, also: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1, \quad x_1 - x_2 - x_3 = -1$

Multipliziert man die parameterfreie Darstellung mit $\frac{1}{|\vec{n}|}$,was einer normierung des Normalenvektors gleichkommt, so erhält man die sogenannte Hessesche Normalenform (HNF):

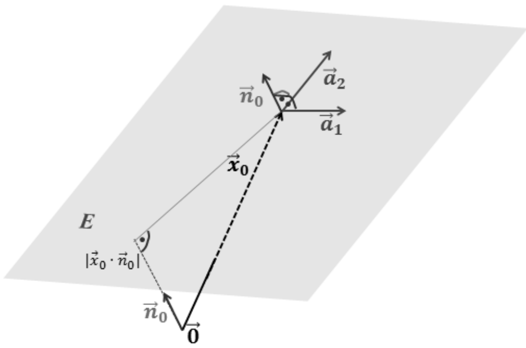
$$E: \ \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}_0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{|\vec{n}|}$$

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{x} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{x}_0$$

$$E: \ \vec{n}_0 \cdot \vec{x} = \vec{n}_0 \cdot \vec{x}_0 \qquad \text{(Hessesche Normalform der Ebene)}$$

Das Besondere an der Hesseschen Normalenform besteht darin, dass die Zahl $\vec{n}_0 \cdot \vec{x}_0$ bis auf ihr Vorzeichen die Länge der Projektion des Vektor $\vec{x}_0$, also eines beliebigen Vektors der Ebene, auf den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$ der Ebene und damit den Abstand der Ebene zum Nullpunkt angibt (siehe Abbildung).

$$|\vec{n}_0 \cdot \vec{x}_0| : \text{Abstand der Ebene zum Nullpunkt}$$



Beispiel

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n},\ |\vec{n}|=\sqrt{3}} \cdot \vec{x} = -1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$E: \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\frac{1}{\sqrt{3}}:\ \text{Abstand zum Nullpunkt}} \qquad \text{HNF: Hessesche Normalform}$$

Zusammengefasst kennen wir folgende Ebenendarstellungen:

1.) Parameterdarstellung

2.) parameterfreie Darstellung

a.) Koordinatenform

b.) Achsenabschnittsform

c.) Hessesche Normalenform

Beispiel 1

$E: \; -x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 24 \qquad$ (Koordinatenform)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 24, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{n}} \cdot \vec{x} = 24 \qquad \text{(Parameterfreie Form)}$$

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{74}$$

$$E: \; \frac{1}{\sqrt{74}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \underbrace{\frac{24}{\sqrt{74}}}_{\text{d: Abstand zum Nullpunkt}} \qquad \text{(HNF)}$$

Für die Parameterdarstellung benötigen wir Einstieg- und zwei Richtungsvektoren:

$$\text{Einstieg: } \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 24, \quad \vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungen: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \cdot \vec{n} = 0; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 0$$

$$E: \; \vec{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \qquad \text{(Parameterdarstellung)}$$

Aus der Koordinatenform findet man die Achsenabschnittsform

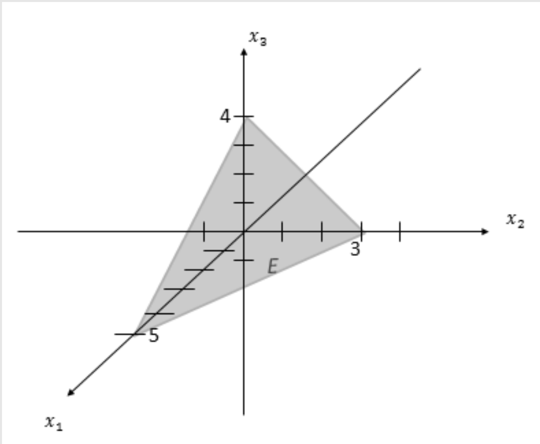
$-x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 24 \qquad \big| : 24$

$-\frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{3} = 1$

$\frac{x_1}{-24} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{3} = 1, \quad a_1 = -24, \; a_2 = 8, \; a_3 = 3$

Beispiel 2

Gegeben ist die Ebene gemäß Bild:



a) Wie lautet die Ebene in parameterfreier Form?

b) Wie lautet die Parameterdarstellung?

c) Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Nullpunkt?

zu a) $\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad \Big| \cdot 60$

$$12x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 60 \text{ also: } \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 60$$

zu b) $E: \ \vec{x} = \vec{x}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$

Punkte der Ebene sind z.B.: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Hieraus ergeben sich die Richtungvektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

und die Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

zu c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{12^2 + 20^2 + 15^2} = \sqrt{144 + 400 + 225} = \sqrt{769}$

$$\frac{1}{\sqrt{769}} \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \frac{60}{\sqrt{769}}$$

Der Abstand zum Nullpunkt ist somit $\frac{60}{\sqrt{769}}$

Sind zwei Ebenen gegeben,

$$E_1: \ \vec{x} = \vec{x}_1 + s_1\vec{a}_1 + t_1\vec{b}_1, \quad \vec{n}_1\vec{x} = d_1$$

$$E_2: \ \vec{x} = \vec{x}_2 + s_2\vec{a}_2 + t_2\vec{b}_2, \quad \vec{n}_2\vec{x} = d_2$$

so kann ihre Lage zueinander entweder

a) parallel und nicht gleich sein, d.h. $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2, \ E_1 \cap E_2 = \emptyset$

b) gleich sein, d.h. $\vec{n_1} \parallel \vec{n}_2, \ \vec{x}_1 \in E_2$

c) sich in einer Geraden schneiden, d.h. $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2, \ E_1 \cap E_2 = g$

Beispiel Man berechne eine mögliche Schnittgerade der Ebenen:

$E_1 : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 : -5x_1 + x_2 + 6x_3 = 14, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 14$

Wir setzen Ebene E_1 in Ebene E_2 ein: $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left(s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 14.$

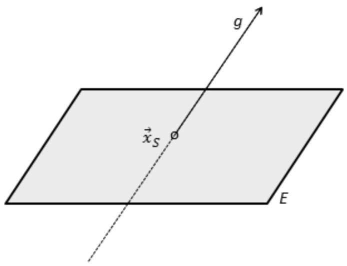
Man ermittelt $-4s + 7t = 14, \ t = \frac{4}{7}s + 2$. Eingesetzt in Ebene E_1 erhalten wir die Schnittgerade:

$g : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{4}{7}s + 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 11/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$

11.6.3 Beispielaufgaben zur analytischen Geometrie

In diesem Abschnitt werden einige weitere Schnittmengen- und Abstandsberechnungsaufgaben vorgestellt.

1. **Schnittpunkt Gerade - Ebene**
   Gegeben ist die Ebene E in parameterfreier Form $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ mit Normalenvektor $\vec{n}$ sowie eine Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{x}_0 + s\ \vec{a}$. Zu bestimmen ist der Schnittpunkt $\vec{x}_S = g \cap E$, sofern er eindeutig existiert.



Zur Lösung wird die Parameterform der Geradengleichung in die parameterfreie Form der Ebene eingesetzt und der Parameter der Gerade ermittelt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{x}_0 + s\,\vec{a}) = d$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich ein Parameter s und eingesetzt in die Geradengleichung dann der Schnittpunkt $\vec{x}_S$.
Sind Gerade und Ebene parallel, so gibt es keine Lösung für s, und liegt g in der Ebene E, sind alle $s \in \mathbb{R}$ Lösung der Gleichung.

Beispiel

(a) Gegeben sind die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E:\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 15$ bzw. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 15$.

Einsetzen von g in E führt zur Gleichung: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 15$, d.h. $30 - 5s = 15$, also $s = 3$.

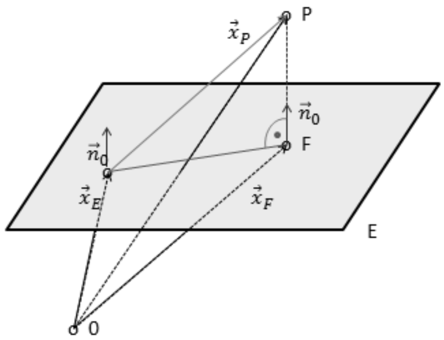
Wir erhalten somit den Schnittpunkt $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) Gegeben sind die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E:\ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 20$. $\left(t = 1, \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(c) Gegeben sind die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E:\ 4x_2 - 3x_3 + 27 = 0$. (-)

2. **Abstand Punkt - Ebene**
Gegeben sind eine Ebene $E: \ \vec{n} \cdot \vec{x} = d_E$ mit Normalenvektor $\vec{n}$, ein Punkt der Ebene E mit Ortsvektor $\vec{x}_E$ sowie ein Punkt P mit Ortsvektor $\vec{x}_P$. Sei $\vec{n}_0$ der Einheitsnormalenvektor, also $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, $|\vec{n}_0| = 1$.

Gesucht ist der Abstand d des Punktes P von der Ebene E. d gibt den kürzesten Abstand zwischen Punkt und Ebene an. Sei $\vec{x}_F$ der Lotfußpunkt in E, dann gilt offensichtlich: $d = |\vec{x}_P - \vec{x}_F|$



Gemäß Zeichung stellt die Projektion des Differenzvektors $\vec{x}_P - \vec{x}_E$ auf den Einheitssormalenvektor $\vec{n}_0$ den Abstandsvektor $\vec{x}_P - \vec{x}_F = d \cdot \vec{n}_0$ dar. Durch Betragsbildung erhalten wir somit den Abstand:

$$d = |\frac{(\vec{x}_P - \vec{x}_E) \cdot \vec{n}_0}{\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0} \vec{n}_0| = |(\vec{x}_P - \vec{x}_E) \cdot \vec{n}_0|$$

Ist auch der Lotfußpunkt von Interesse, so kann man in folgenden Schritten vorgehen:

(a) Aufstellen der Hilfsgeraden senkrecht zu E durch P: $g: \ \vec{x} = \vec{x}_P + s\vec{n}$
(b) Berechnung des Lotfußpunktes $\vec{x}_F$ als Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g.
(c) Abstandberechung durch $d = |\vec{x}_P - \vec{x}_F|$

Beispiel

Gegeben sind $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(3,3,4).

1.) Anwenden der Abstandsformel:
Für den Normalenvektor gilt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ |\vec{n}| = \sqrt{3}, \ \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E: \ \vec{n} \cdot \vec{x} = 1$$

Also: $d = (\vec{x}_P - \vec{x}_E) \cdot \vec{n}_0 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} 9 = 3\sqrt{3}$

2.) Mit Lotfußpunkt:

i) Hilfsgerade g lautet: $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

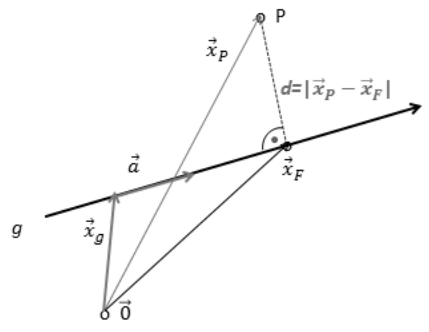
ii) Schnittpunktberechnung liefert: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1,$

d.h. $s = -3$, also $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii) Abstandberechung durch $d = |\vec{x}_P - \vec{x}_F| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{3}$

3. **Abstand Punkt - Gerade**

Gegeben sind ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{x}_P$ und eine Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{x}_g + t\,\vec{a}$. Gesucht ist der (kürzeste) Abstand d des Punktes von der Geraden g. Mit $\vec{x}_F$ wird der Lotfußpunkt bezeichnet.



Gemäß Zeichnung muss der Differenzvektor $\vec{x}_P - \vec{x}_F$ senkrecht auf den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g stehen, also gilt für den Lotfußpunkt: $(\vec{x}_P - \vec{x}_F) \cdot \vec{a} = 0$, d.h.

$$(\vec{x}_P - \vec{x}_g - t_F\,\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$$

Aus dieser letzlich skalaren Gleichung ergibt sich der Parameterwert t_F und damit der Lotfußpunkt $\vec{x}_F = \vec{x}_g + t_F\ \vec{a}$. Den Abstand selber findet man dann durch Betragsbildung: $d = |\vec{x}_G - \vec{x}_F|$.

Beispiel

Gegeben ist die Gerade $g\ :\ \ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + t\ \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$. Wie weit liegt der Punkt P(1,-2,5) von der Geraden g entfernt?

Zur Lösungsfindung dient die Gleichung:
$\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} - t_F\ \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} = 0,$

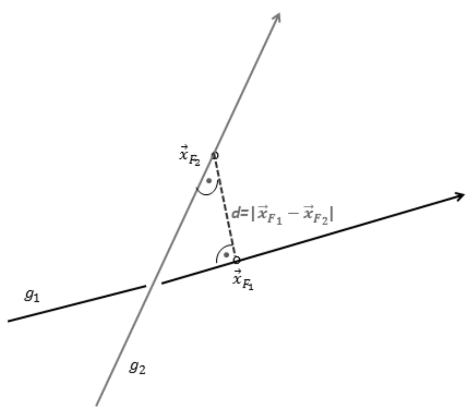
d.h. $\left(\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix} - t_F\ \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} = 0$, d.h. $5 - 50t_F = 0$, $t_F = \frac{1}{10}$.

Damit ermittelt man den Lotfußpunkt: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}35\\6\\43\end{pmatrix}$

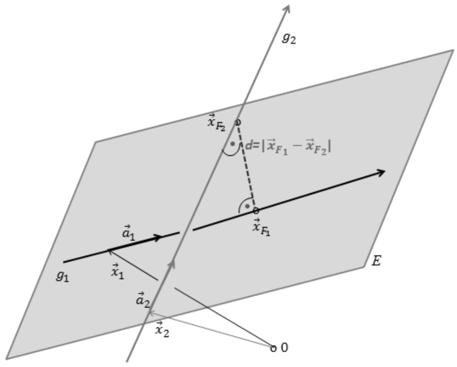
Als Abstand findet man dann:
$d = |\vec{x}_G - \vec{x}_F| = |\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}35\\6\\43\end{pmatrix}| = \frac{1}{10}|\begin{pmatrix}-25\\-26\\7\end{pmatrix}| = \frac{1}{10}\sqrt{625+676+49} =$
$\frac{1}{10}\sqrt{1350} = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

4. **Abstand windschiefer Geraden**
Gegeben sind zwei windschiefe Geraden:

$$\begin{aligned} g_1 :\ \vec{x} &= \vec{x}_1 + s\ \vec{a}_1 \\ g_2 :\ \vec{x} &= \vec{x}_2 + t\ \vec{a}_2 \end{aligned}$$



Sei E die Hilfsebene der Punkte $\vec{x} = \vec{x}_1 + s\ \vec{a}_1 + t\ \vec{a}_2$. In E liegt die Gerade g_1; mit g_2 besitzt sie keinen Schnittpunkt. Die Hilfsebene E lautet in parameterfreier Form: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}_1$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$.



Der gesuchte Abstand $d = |\vec{x}_{F_1} - \vec{x}_{F_2}|$ entspricht dem Abstand des gegebenen Punktes $\vec{x}_2$ von der Hilfsebene E, also

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \vec{n}_0| = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}| = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}|$$

Beispiel
Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden sind windschief (s.o.); zu berechnen ist ihr Abstand.

Für den Normalenvektor der Hilfsebene E gilt:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man für den Abstand:

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}| = | \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{139}} \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{139}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{19}{\sqrt{139}}$$

Hinweis:
Um die Lotfußpunkte $\vec{x}_{F_1} = \vec{x}_1 + s_F \vec{a}_1$ sowie $\vec{x}_{F_2} = \vec{x}_2 + t_F \vec{a}_2$ zu bekommen, kann man beispielsweise die Orthogonalitätsgleichungen

$$\begin{aligned} (\vec{x}_{F_1} - \vec{x}_{F_2}) \cdot \vec{a}_1 &= 0 \\ (\vec{x}_{F_1} - \vec{x}_{F_2}) \cdot \vec{a}_2 &= 0 \end{aligned}$$

aufstellen und das hieraus resultierende lineare Gleichungssystem für die Unbekannten s_F und t_F lösen. Für den Abstand gilt dann $d = |\vec{x}_{F_1} - \vec{x}_{F_2}|$.

12 Funktionen: Grundbegriffe, Eigenschaften und erste Beispiele

12.1 Grundbegriffe

Eine reelle **Funktion** $f : D \to Z$ ist eine Zuordnung, bei der jeder reellen Zahl $x \in D \subset \mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl $y = f(x) \in Z \subset \mathbb{R}$ zugeordnet ist.

Schreibweise:

$$f : D \to Z,\ y = f(x)$$

Dabei heißen

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{Definitionsbereich} \\ Z & : & \text{Zielbereich} \\ x & : & \text{Argument} \\ y & : & \text{Funktionswert} \end{array}$$

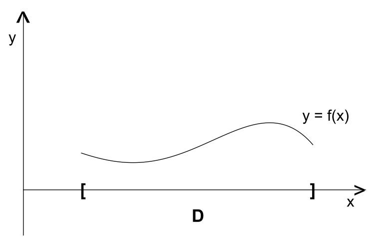
Die Elemente des Zielbereichs, die tatsächlich als Funktionswerte der Funktion f in Frage kommen, bilden den **Wertebereich**

$$W = \{y \in Z |\ \text{es gibt ein}\ x \in D\ \text{mit}\ y = f(x)\}$$

Reelle Funktionen werden durch ihren **Funktionsgraphen**

$$\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) | x \in D\}$$

veranschaulicht. Er umfasst alle Punkte (x, y), die zu der Funktion gehören.



Als Hilfsmittel, um den Graphen zu erstellen, dient eventuell eine Wertetabelle:

Es folgt eine tabellarische Zusammenstellung wichtiger Bezeichnungen bei Funktionen

x	x_1	x_2	$\dots$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$

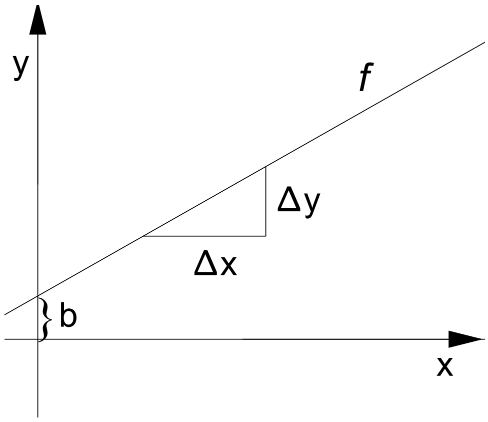
x	das Argument von f
$f(x)$	der Funktionswert von f an der Stelle x
$\left.\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & f(x) \\ y & = & f(x) \end{array}\right\}$	Angabe der Zuordnungsvorschrift, Abbildungsvorschrift
D, D_f	der Definitionsbereich der Funktion f
Z_f	die Zielbereich der Funktion f
$D_{\max}$	für eine reelle Funktion f: die größte Teilmenge von $\mathbb{R}$ auf der die definierende Zuordnungsvorschrift für f noch gültig ist. Ist kein Definitionsbereich angegeben, so gilt $D = D_{\max}$. Beispiel: $\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & \frac{1}{1-x} \\ D_{\max} & = & \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{array}$
$f(A)$	für eine Teilmenge $A \subset D$ ist $f(A)$ die folgende Teilmenge der Zielmenge Z: $\{y \vert \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$
$f^{-1}(B)$	für eine Teilmenge $B \subset Z$ ist $f^{-1}(Z)$ die folgende Teilmenge des Definitionsbereichs D: $\{x \vert x \in D \text{ und } f(x) \in B\}$

12.2 Lineare Funktionen

Die vielleicht einfachsten Funktionen sind die linearen Funktionen. Ihr Graph im Koordinatensystem ist eine Gerade und sie besitzen die Darstellung

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ y = f(x) = mx + b$$

mit den reellen Parametern m und b. Der Parameter m gibt die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Geraden an, während b der y-Achsenabschnitt ist.



Hinweis: Ist die Steigung $m = 0$, so ist f eine konstante Funktion, die Gerade liegt dann parallel zur x-Achse.

Geraden mit $m \neq 0$ und $b \neq 0$ können durch Umformen in die Achsenabschnittsform überführt werden; denn mit $a = \frac{-b}{m}$ folgt aus $y = mx + b$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Neben b hat dann auch a die Bedeutung eines Achsenabschnitts, allerdings auf der x-Achse.

Eine Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt. Seien die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben. dann lautet die Gerade durch die beiden Punkte (Zweipunkteform):

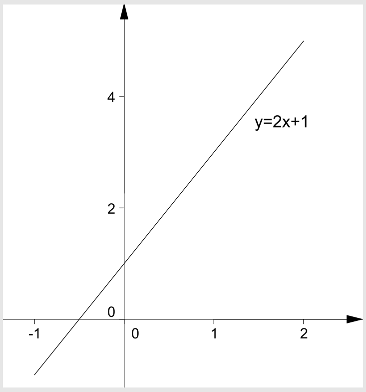
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Eine Gerade ist auch durch einen Punkt $(x_1,\ x_2)$ und die Steigung m eindeutig bestimmt, dann lautet die Geradengleichung (Punkt-Steigungsform):

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

Beispiele:

1.) Man zeichne die Gerade $y = 2x + 1, (\ m = 2,\ b = 1)$.



2.) Man bestimme die Gerade durch die Punkte $(-1,1),\ (1,7)$.

$$y = mx + b \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 1 = -m + b \\ 7 = m + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 4 \\ m = 3 \end{array}$$

also $y = 3x + 4 \Rightarrow$ Achsenabschnitt $= 4$, Steigung der Gerade$= 3$

12.3 Quadratische Funktionen (Parabeln)

Seien a, b, c reelle Zahlen mit $a \neq 0$. Quadratische Funktionen sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgender Funktionsvorschrift:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\ &= a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c \quad \text{(Quadratische Ergänzung)} \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= m(x + b_1)^2 + b_2 \ \text{ mit } m = a,\ b_1 = \frac{b}{2a},\ b_2 = c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Die Parameter $m,\ b_1$ und b_2 lassen sich geometrisch deuten.
m ist ein Steigungsparameter mit

$$\left.\begin{array}{lll} m > 0 & : \ \text{nach oben offen,} & \text{Minimum bei x} = -\frac{b}{2a} \\ m < 0 & : \ \text{nach unten offen,} & \text{Maximum bei x} = -\frac{b}{2a} \end{array}\right\} \text{Scheitelpunkt } S(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a})$$

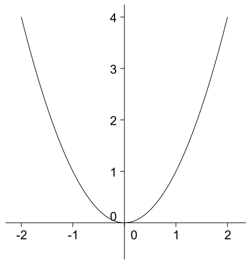
b_1 gibt die Verschiebung der Parabel in x-Richtung an.
b_2 gibt die Verschiebung der Parabel in y-Richtung an.

Beispiele:

1.) $y = x^2$ Normalparabel

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



2.) $y = x^2 + x - 6$

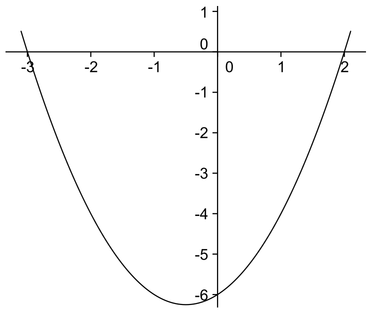
$$\begin{aligned} y &= x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \text{ (Nullstellen bei 2 und -3)} \\ &= (x + \tfrac{1}{2})^2 - 6 - \tfrac{1}{4} \\ &= (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{25}{4} \end{aligned}$$

Scheitelpunkt bei $x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{25}{4}$

Nullstellen bei $x = 2,\ x = -3$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	-4	-6	-6	-4	4

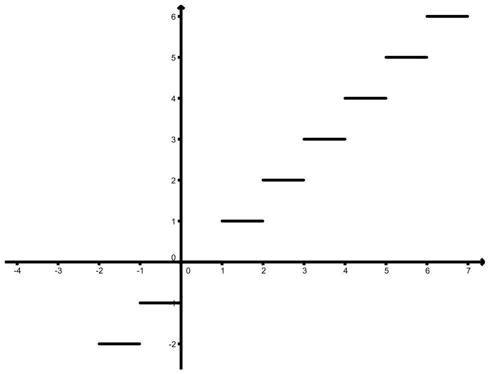


12.4 Gaußklammer

Die **Gaußklammer** (auch Abrundungsfunktion genannt) einer reellen Zahl x ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Sie ist definiert durch:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$$

So ist zum Beispiel
$\lfloor 2,3 \rfloor = 2,\ \lfloor 10,123 \rfloor = 10,\ \lfloor 27 \rfloor = 27,\ \lfloor -2,3 \rfloor = -3$



Die Nullstellen der Gaußklammer sind das Intervall $[0, 1)$.

12.5 Funktionseigenschaften

12.5.1 Gleichheit von Funktionen

Die Funktionen $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$ heißen **gleich**, falls

a) $D_f = D_g$

b) $f(x) = g(x)$, für alle $x \in D_f$

Man schreibt: $f = g$

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R},\ y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = g(x) = x + 3$$

$$f \neq g, \quad \text{da } D_f \neq D_g$$

$$h : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, y = h(x) = x + 3$$

$$h = f, \quad h \neq g$$

12.5.2 Nullstellen von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to Z, y = f(x)$, besitzt in $x_0 \in D$ eine **Nullstelle**, falls gilt

$$f(x_0) = 0$$

In einer Nullstelle schneidet der Funktionsgraph die x-Achse oder berührt sie. Man errechnet die Nullstellen einer Funktion, indem man die Bestimmungsgleichung $f(x) = 0$ nach x auflöst.

Beispiel:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$f(x) = 0$ d.h. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

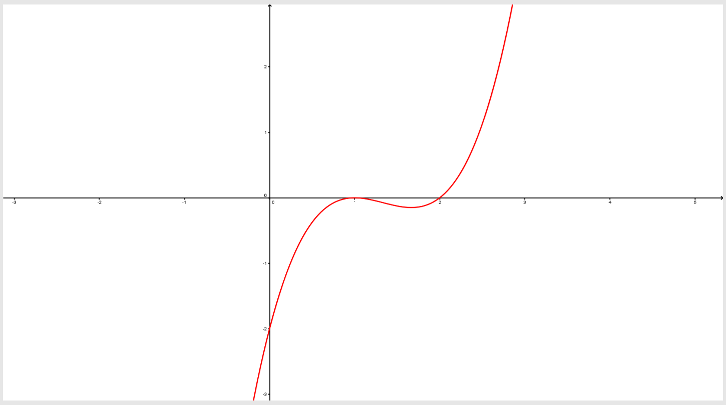
$x = 1$ wird erraten. Dann kann der Faktor $x - 1$ abgespalten werden, und es gilt

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad = \quad (x-1)(x^2 - 3x + 2) \quad = \quad (x-1)(x-1)(x-2)$$

Damit sind die Nullstellen bei

$x = 1$ (doppelte Nullstelle, f berührt die x-Achse)

$x = 2$ (einfache nullstelle, f schneidet die x-Achse)



12.5.3 Symmetrie

Eine Funktion f heißt **gerade (achsensymmetrisch)**, falls für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(-x)$$

Man erkennt bei geraden Funktionen eine Achsensymmetrie am Funktionsgraphen. Durch Spiegelung an der y-Achse ändert sich der Graph nicht.

Eine Funktion f heißt **ungerade (punktsymmetrisch)**, falls für alle $x \in D$ gilt

$$f(-x) = -f(x), \qquad f(x) = -f(-x)$$

Punktsymmetrie liegt dann vor, wenn sich der Funktionsgraph durch Drehung von 180° um den Nullpunkt nicht ändert.

Hinweise:

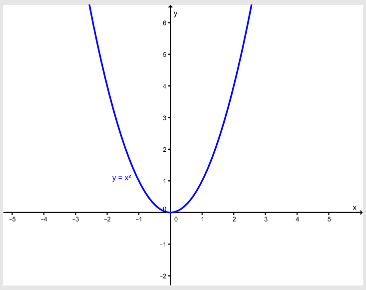
- Zur Symmetrieuntersuchung setzt man im Funktionsausdruck $-x$ für x ein und prüft, ob das Minuszeichen verschwindet oder sich als ganzes herausziehen lässt.
- Es gibt wichtige Funktionen, beispielsweise $f(x) = x^2 + x^3$ oder $f(x) = e^x$, die weder gerade noch ungerade sind. Interessant ist, dass sich jede Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen lässt:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerade}}$$

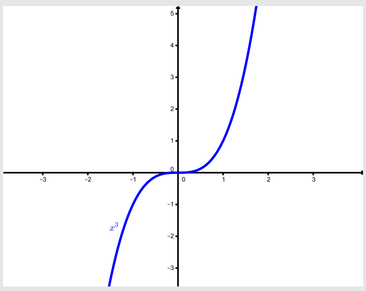
- Einige Funktionen besitzen eine verschobene Symmetrie. So ist z.B. die Funktion $y = (x+5)^2 - 1$ achsensymmetrisch bzgl. der Geraden $x = -5$. Man bezeichnet sie jedoch dann nicht mehr als gerade.

Beispiele:

a) $y = f(x) = x^2$, f ist gerade, da: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



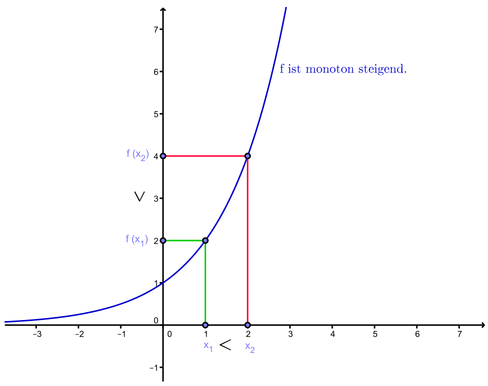
b) $y = f(x) = x^3$, f ist ungerade, da:$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



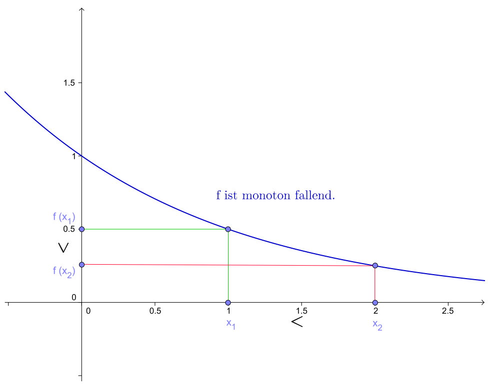
12.5.4 Monotonie

Mithilfe von Monotonieaussagen beschreibt man das Veränderungsverhalten einer Funktion hinsichtlich der Zu- und Abnahme der Funktionswerte.

Eine Funktion f heißt **monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Eine Funktion f heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

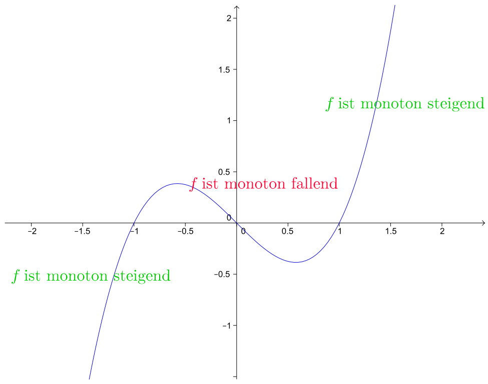


Eine Funktion f heißt **monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Eine Funktion f heißt **streng monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Hinweise:

- Die konstante Funktion $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) ist sowohl monoton wachsend, als auch fallend.
- Einige Funktionen sind nur auf Teilbereichen monoton fallend bzw. steigend.



12.5.5 Periodizität

Eine Funktion $f : D \to Z, y = f(x)$, heißt **periodisch** mit der Periode p, falls für alle $x \in D$ gilt:

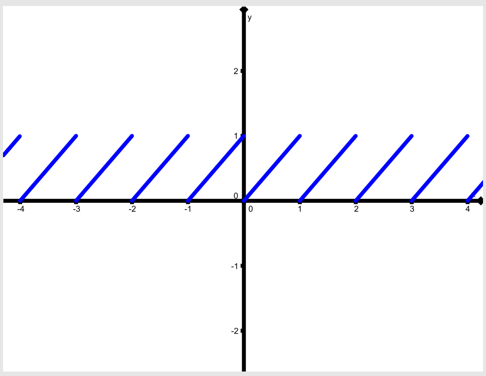
$$f(x) = f(\underbrace{x+p}_{\in D})$$

Mit p ist auch $k \cdot p$ $(k \in Z)$ eine Periode der Funktion f. Die kleinste Periode $p > 0$ heißt **primitive Periode**. Wenn von der Periode einer Funktion f gesprochen wird, ist meist die primitive Periode gemeint.

Beispiele:

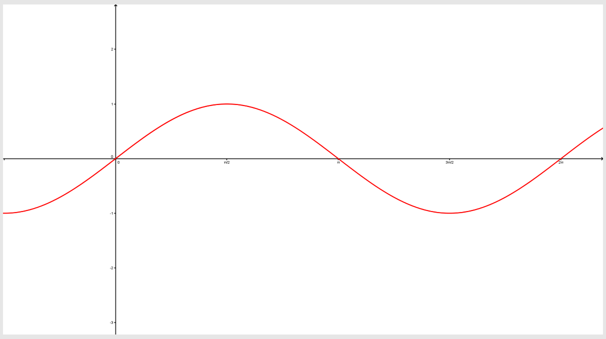
a) $f(x) = c$ (konstante Funktion, $c \in \mathbb{R}$)
f ist periodisch für alle $p \in \mathbb{R}$

b) $y = f(x) = x - \lfloor x \rfloor$,
wobei $\lfloor x \rfloor$ die oben beschriebene Gaußklammer ist.



Diese modifizierte Gaußklammer besitzt die Periode 1. Dieselbe Funktion kann auch folgendermaßen beschrieben werden: f ist 1-periodisch mit $f(x) = x$ für $x \in [0, 1)$.

c) $f(x) = \sin(x)$
Die Funktion $\sin(x)$ besitzt die Periode 2π



12.5.6 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

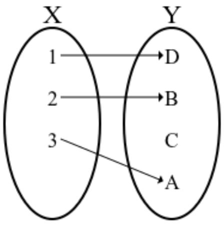
Diese Funktionseigenschaften sollen sicher stellen und beschreiben, dass eine Funktion umkehrbar ist.

Eine Funktion $f : D \to Z$ heißt **injektiv** (umkehrbar),
falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

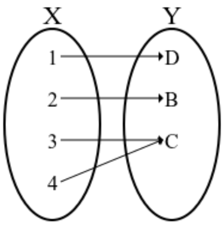
Eine Funktion $f : D \to Z$ heißt **surjektiv** (Funktion auf Z),
falls zu jedem $y \in Z$ ein $x \in D$ existiert mit $y = f(x)$

Eine Funktion heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist.

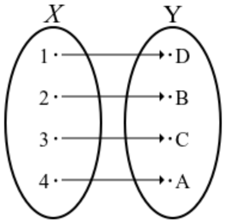
Grafische Veranschaulichungen:



injektiv, nicht surjektiv



nicht injektiv, surjektiv



injektiv, surjektiv $\}$ bijektiv

12.6 Operationen mit Funktionen, Verkettung

Aus zwei gegebenen Funktionen lassen sich mithilfe von Operatoren neue Funktionen zusammensetzen. Zunächst sollen die Funktionsoperationen Addition, Multplikation, Division und Faktormultiplikation beschrieben werden. Die Funktionseigenschaften der Teilfunktionen können sich durch die Operation verändern, manchmal übertragen sie sich auch auf die zusammengesetzte Funktion.

Seien $f : D_f \to Z_f, g : D_g \to Z_g$ zwei Funktionen.
Dann wird vereinbart:

(1) Addition von Funktionen
$h = f + g$ durch $h : D_f \cap D_g \to Z_h$, $h(x) = f(x) + g(x)$

(2) Multiplikation von Funktionen
$h = f \cdot g$ durch $h : D_f \cap D_g \to Z_h$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

(3) Division von Funktionen
$h = f : g = \frac{f}{g}$ durch $h : D_f \cap D_g \to Z_h$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (mit $g(x) \neq 0$)

(4) Faktormultiplikation
$h = c \cdot f(x)$ durch $h : D_f \to Z_n$, $h(x) = c \cdot f(x)$ $(c \in \mathbb{R})$

Beispiel $f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad g(x) = x^2 + 1$

$h = f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$h(x) = f(x) + g(x) \quad = x^2 + 3x - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 + 3x$

$h = f \cdot g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$h(x) = f(x) \cdot g(x) = \ (x^2 + 3x - 1) \cdot (x^2 + 1) \ = \ x^4 + x^2 + 3x^3 + 3x - x^2 - 1$
$= x^4 + 3x^3 + 3x - 1$

Eine besondere Art der Verknüpfung ist die **Verkettung zweier Funktionen**. Hierdurch wird eine Hintereinanderausführung der Funktionen beschrieben, welche nur dann möglich ist, wenn die Funktionswerte der einen (inneren) Funktion im Definitionsbereich der zweiten (äußeren) Funktion liegen.

Seien $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$ Funktionen mit $Z_f \subset D_g$.
Dann heißt die zusammengesetzte Funktion

$$h : D_f \to Z_g \text{ mit } h(x) = g(f(x))$$

Verkettung von f **und** g. Schreibweise: $h = g \circ f$

f heißt auch **innere** Funktion, g die **äußere** Funktion.

Hinweise:

1) Reihenfolge der Verkettung ist wichtig:
$g \circ f \neq f \circ g$ (in der Regel)

2) Verkettung darf nicht mit der Multiplikation verwechselt werden.
$g \circ f \neq g \cdot f$

Beispiele

a) $f : [0,2] \to [4,10], y = f(x) = 3x + 4$
$g : [1,\infty) \to [0,1], y = g(x) = \dfrac{1}{x}$

$g \circ f$: $[0,2] \to [0,1], y = g(f(x)) = g(3x+4) = \dfrac{1}{3x+4}$

$f \circ g$: $[1,\infty) \to [4,10], y = f(g(x)) = f(\dfrac{1}{x}) = 3 \cdot \dfrac{1}{x} + 4 = \dfrac{3}{x} + 4$

$f \cdot g|_{[1,2]}$: $[1,2] \to \mathbb{R}, y = f(x) \cdot g(x) = (3x+4)\dfrac{1}{x} = 3 + \dfrac{4}{x}$

b) $f(x) = 5x - 1$
$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$(\underbrace{f}_{\text{äuere}} \circ \underbrace{g}_{\text{innere}})(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = 5\sqrt{1-x^2} - 1$$

$$(\underbrace{g}_{\text{äuere}} \circ \underbrace{f}_{\text{innere}})(x) = g(f(x)) = g(5x-1) = \sqrt{1-(5x-1)^2}$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$
$g(x) = (5-x)^{27}$
$h(x) = |x+1|$

$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$

$$\begin{aligned} &= f(g(|x+1|)) \\ &= f((5-|x+1|)^{27}) \\ &= \sqrt{(5-|x+1|)^{27}} \\ &= (5-|x+1|)^{\frac{27}{2}} \end{aligned}$$

Es ist auch für spätere Zwecke der Differential- und Integralrechnung die Umkehrung von Bedeutung, also, dass bei gegebenen Funktionsausdrücken die Zerlegung in Elementarfunktionen erkannt wird.

$$\begin{aligned} &f(x) = (x^2 - 3x + 4)^7 + \sqrt{x+1} \\ &f_1(x) = x^7 \\ &f_2(x) = \sqrt{x} \\ &f_3(x) = x^2 - 3x + 4 \\ &f_4(x) = x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_3(x))^7 + \sqrt{f_4(x)} \\ &= f_1(f_3(x)) + f_2(f_4(x)) = (f_1 \circ f_3)(x) + (f_2 \circ f_4)(x) \\ f &= f_1 \circ f_3 + f_2 \circ f_4 \end{aligned}$$

12.7 Umkehrfunktion

Funktionen $f : D \to Z$ ordnen jedem $x \in D$ genau ein $y \in Z$ zu. Vielfach ist man daran interessiert, die einem gegebenem y-Wert zugeordneten x-Werte zu bestimmen. Dies können theoretisch mehrere sein. Man ist also an der Umkehrung der Funktion interessiert. Damit die Umkehrung auch wieder eine Funktion im mathematischen Sinne ist, muss der dem y-Wert zugehörige x-Wert eindeutig sein. Eine umkehrbare Funktion muss also folgende Umkehrbarkeitsbedingung erfüllen:

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in D$$

oder was dem gleichbedeutend ist

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \text{ für alle } x_1, x_2 \in D$$

Die Abbildung, die jedem Bildpunkt $f(x)$ einer umkehrbaren Funktion das eindeutige x zuordnet, heißt Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W \subset Z \to D,\; x = f^{-1}(y)$$

Die Funktionen $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ besitzen denselben Graphen, die Zuordnungsrichtung ist jedoch geändert. Statt x einem y wird bei f^{-1} ein y einem x zugeordnet. Es ist nun üblich bei den Umkehrfunktionen die Rollen der Variablen x und y zu vertauschen, so dass x wieder die Rolle des Arguments einnimmt. Die Umkehrfunktion heißt dann

$$y = f^{-1}(x),$$

was zur Folge hat, das der Funktionsgraph von f^{-1} sich durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden ergibt.
Im konkreten Fall ergibt sich die Umkehrfunktion einer umkehrbaren Funktion $y = f(x)$ in zwei Schritten

1.) Auflösen von $y = f(x)$ nach $x \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

2.) Vertauschen von x und $y \Rightarrow y = f^{-1}(x)$

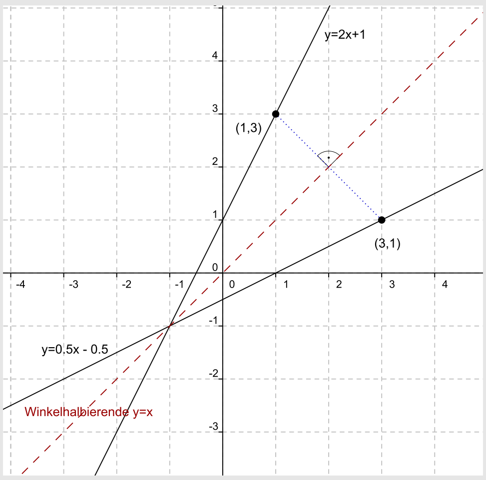
Dabei werden auch Definitionsbereich und Wertebereich vertauscht:

$$D_{f^{-1}} = W_f, \quad W_{f^{-1}} = D_f$$

Für Funktion und Umkehrfunktion gilt zudem immer:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

Beispiel 1
Man berechne und zeichne die Umkehrfunktion der linearen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = 2x + 1$. Die Funktion ist umkehrbar, wie man leicht sieht.
1. Schritt: Auflösen nach x ergibt $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
2. Schritt: Vertauschen von x und y führt zu $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
Die Zeichnung der Graphen von f und f^{-1} verdeutlicht die Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

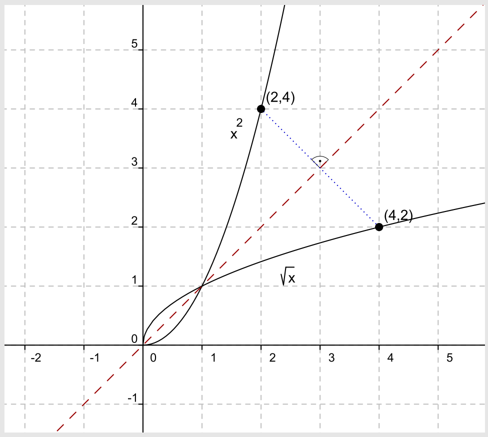


Häufig hat man es mit Funktionen zu tun, die zunächst nicht umkehrbar sind. Die Umkehrbarkeitsbedingung kann aber dadurch erfüllt werden, dass man den Definitionsbereich auf einen umkehrbaren Bereich einschränkt.

Beispiel 2
Typisches Beispiel für einen solchen Sachverhalt ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = x^2$. Sowohl 5 als auch -5 werden auf 25 abgebildet. Beschränkt man die Parabel auf nicht negative Werte, so erhält man die Funktion

$$f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad y = f(x) = x^2$$

Diese so eingeschränkte Funktion ist wieder umkehrbar.
1. Schritt: Auflösen nach x ergibt $x = \sqrt{y}$
2. Schritt: Vertauschen von x und y führt zu $y = \sqrt{x}$



12.8 Verschieben und Strecken einer Funktion

Ist eine bestimmte Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ gegeben, so geht es häufig um lineare Modifikationen einer solchen Grundfunktion. Gebräuchliche Modifikationen sind

- Verschiebung in x-Richtung
- Verschiebung in y-Richtung
- Streckung in x-Richtung
- Streckung in y-Richtung

Dabei ist darauf zu achten, dass Definitions- und Zielbereiche der Funktionen sich verändern können. Diese Funktionsmodifikationen sollen der Reihenfoge nach kurz vorgestellt werden.

1. **Verschiebung in x-Richtung**
   Eine Verschiebung in x-Richtung drückt sich im Funktionsausdruck durch eine additive Konstante beim Argument in der Regel x aus.

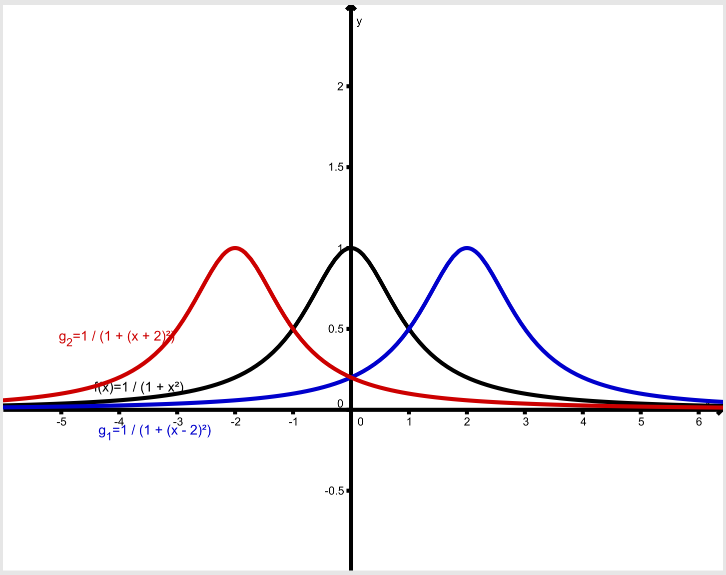
Dabei gilt:
Die um $a > 0$ nach rechts verschobene Funktion $f(x)$ besitzt die Darstellung

$$g(x) = f(x - a)$$

Die um $a > 0$ nach links verschobene Funktion $f(x)$ besitzt die Darstellung

$$g(x) = f(x + a)$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
Um 2 nach rechts verschoben ergibt sich die Funktion: $g_1(x) = \dfrac{1}{1 + (x - 2)^2}$.
Um 2 nach links verschoben ergibt sich die Funktion: $g_2(x) = \dfrac{1}{1 + (x + 2)^2}$.



2. **Verschiebung in y-Richtung**
   Eine Verschiebung in y-Richtung bewirkt, dass der gesamte Funktionsgraph nach oben bzw. unten verlagert wird. Dies drückt sich im Funktionsausdruck durch eine additive Konstante beim Funktionsausdruck aus.
   Dabei gilt: Die um A nach verschobene Funktion $f(x)$ besitzt die Darstellung

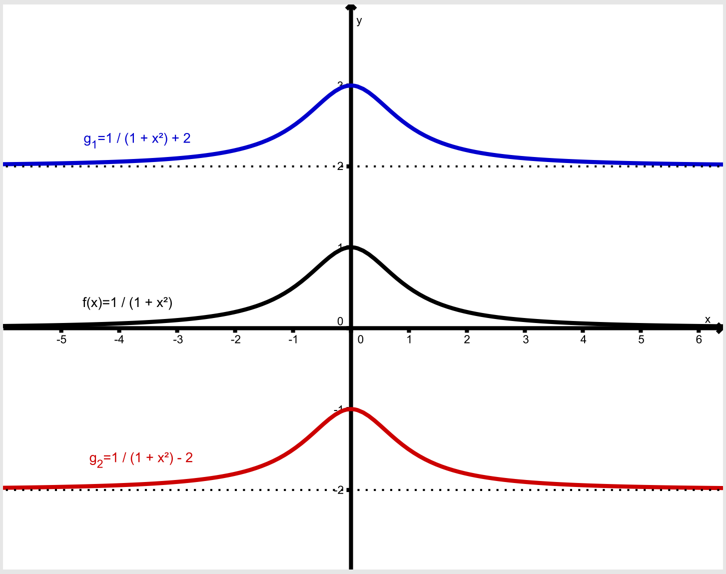
$$g(x) = f(x) + A$$

   Ist $A > 0$, so wird f nach oben, ist $A < 0$, so wird f nach unten verschoben.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Um 2 nach oben verschoben ergibt sich die Funktion: $g_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + 2$.

Um 2 nach unten verschoben ergibt sich die Funktion: $g_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 2$.



3. **Streckung in x-Richtung**
   Eine Streckung in x-Richtung wird erreicht, in dem das Argument der Funktion mit einem positivem Faktor multipliziert wird. Eine Streckung mit einem Faktor kleiner 1 bewirkt eine Streckung, ein Faktor größer als 1 eine Stauchung in x-Richtung. Die um $b > 0$ gestreckte Funktion $f(x)$ besitzt die Darstellung

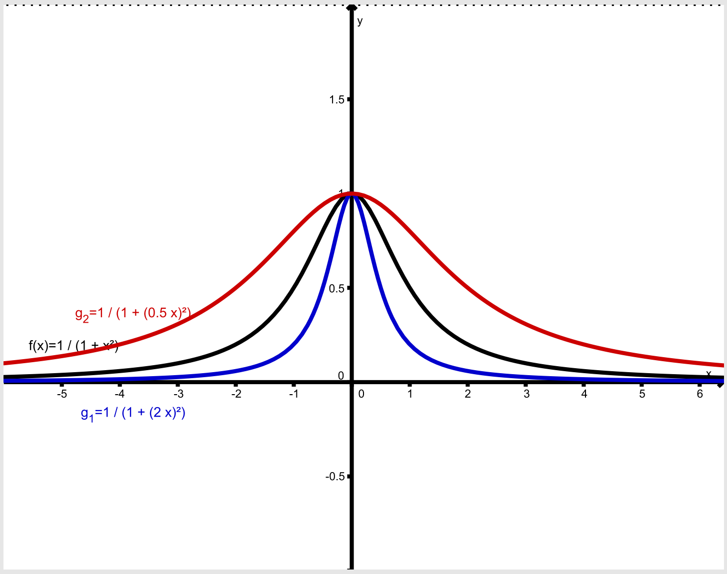
$$g(x) = f(b \cdot x)$$

Ein negativer Faktor spiegelt die gegebene Funktion zusätzlich an der y-Achse.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Mittels x-Streckung um Faktor 2 ergibt sich die Funktion: $g_1(x) = \dfrac{1}{1+(2x)^2}$.

Mittels x-Streckung um Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich die Funktion: $g_2(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{2}x)^2}$.

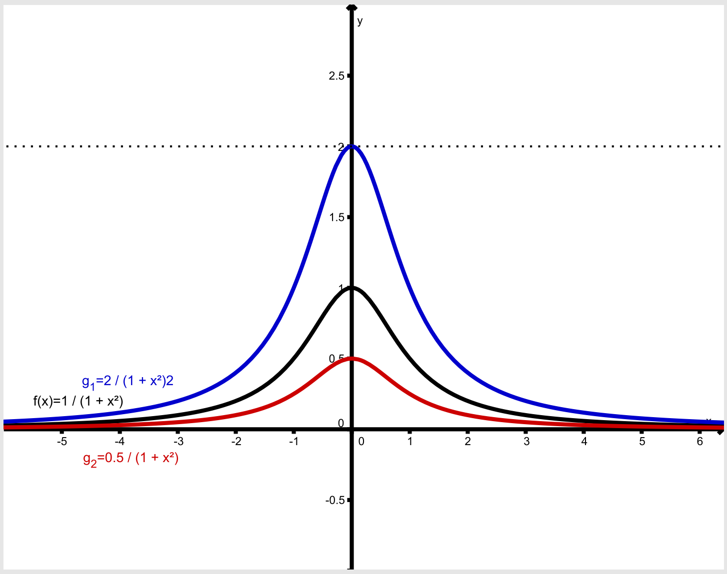


4. **Streckung in y-Richtung**
   Eine Streckung in y-Richtung wird erreicht, in dem die gesamte Funktion mit einem positivem Faktor multipliziert wird. Eine Streckung mit einem Faktor kleiner 1 bewirkt eine Stauchung.
   Die um $c > 0$ gestreckte Funktion $f(x)$ besitzt die Darstellung

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

   Ein negativer Faktor spiegelt die gegebene Funktion zusätzlich an der x-Achse.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
Mittels Streckung um Faktor 2 ergibt sich die Funktion: $g_1(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.
Mittels Streckung um Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich die Funktion: $g_2(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}$.

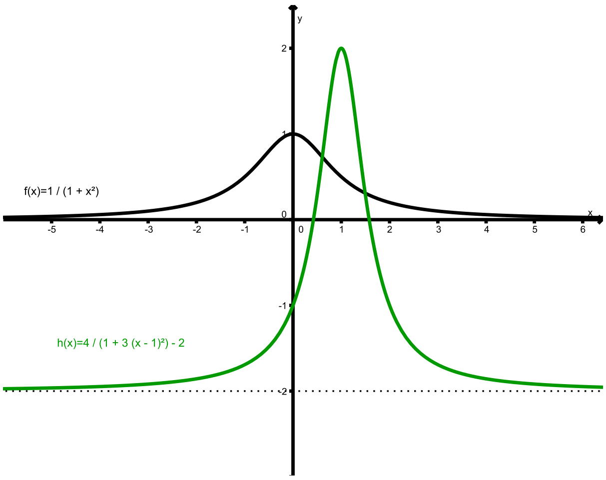


Verschiebungen und Streckungen können auch kombiniert auftreten. Dabei ist auf die Reihenfolge zu achten. Sei beispielsweise wiederum $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Die

- um $a = 1$ in x-Richtung verschobene,
- um Faktor $b = 3$ in x-Richtung gestauchte,
- um Faktor $B = 4$ in y-Richtung gestreckte und
- um $A = 2$ nach unten in y-Richtung verschobene

Funktion lautet

$$h(x) = \frac{4}{1 + 3(x-1)^2} - 2$$



13 Polynome

13.1 Einführung

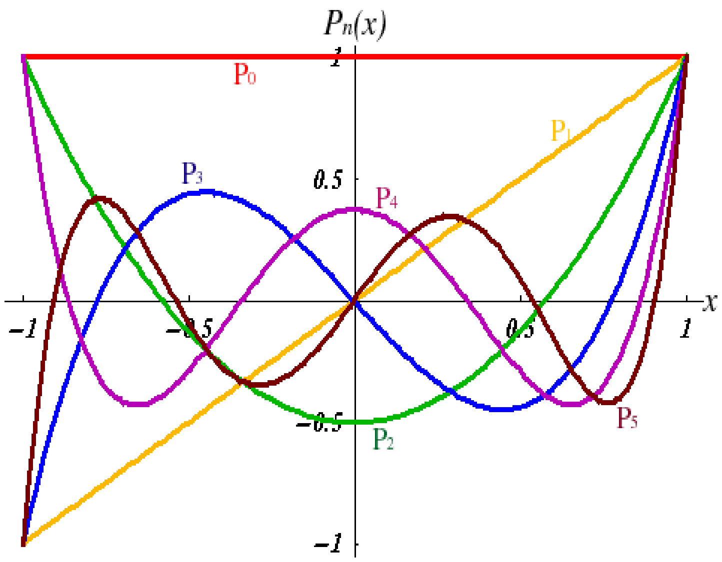
Wir haben bereits lineare Funktionen und Parabeln kennengelernt. Sie lassen sich in die allgemeinere Funktionsklasse der Polynome einbetten. Ein Polynom ist eine Überlagerung sogenannter Monome, also von Potenzen der Form x^n mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei $n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Polynom vom Grad n. Die Zahlen $a_i, i = 1, ..., n$ heißen **Koeffizienten**, die Zahl n der Grad des Polynoms mit der Schreibweise $\text{grad}(p_n(x)) = n$.
Lineare Funktionen sind Polynome vom Grad 1, Parabeln Polynome vom Grad 2, Polynome 0-ten Grads sind konstant.
Polynome sind für Anwendungen sehr wichtig, da sie einerseits einfach gestrickt sind und andererseits durch Wahl ihrer Koeffizeinten sehr flexibel einsetzbar sind. Einige Beispiele sollen den prinzipiellen Verlauf der Polynome mit wachsendem Grad veranschaulichen:

- $p_0(x) = 1$
- $p_1(x) = x$
- $p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- $p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- $p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
- $p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$



Man erkennt an Hand der Verläufe, dass Polynome mit wachsendem Grad ein stärker werdendes Schwingverhalten aufweisen. Zudem verlaufen sie sich einschließlich ab Grad 1 für $x \to \pm\infty$ immer im Unendlichen, wobei dort der Koeffizient des höchsten Monoms im Polynom das Verhalten diktiert.
Die hier gezeigten Polynome besitzen ab Grad 1 alle mindestens 1 Nullstelle. Es gibt aber auch Polynome beliebig hohen Grades, die keine Nullstelle aufweisen, z.B. $p(x) = x^4 + 1$.

Mit Polynomen kann man fast rechnen wie mit ganzen Zahlen. Sie lassen sich addieren, subtrahieren und multiplizieren. Als Ergebnis entsteht dann wieder ein Polynom. Nur das Dividieren erweist sich komplizierter.

Beispiele

1. $(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) + (2x^3 - 6x^2 + 1) = 3x^3 + 3x - 9$
2. $(x^3 + 6x^2 + 3x - 10) - (x^3 - 3x^2 + 4x - 7) = 9x^2 - x - 3$
3. $(x^2 + 3x - 7)(5x - 2) = 5x^3 + 15x^2 - 35x - 2x^2 - 6x + 14 = 5x^3 + 13x^2 - 41x + 14$
4. $$\begin{array}{rrrrl}
(\;\; x^3 & +5x^2 & +9x & +5\big) & : \big(x+1\big) = x^2+4x+5 \\
-x^3 & -x^2 & & & \\
\cline{1-2}
 & 4x^2 & +9x & & \\
 & -4x^2 & -4x & & \\
\cline{2-3}
 & & 5x & +5 & \\
 & & -5x & -5 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$
5. $$\begin{array}{rrrrrrl}
(\;\; 4x^5 & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & & -1\big) & : \big(x^2+1\big) = 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \dfrac{2x-3}{x^2+1} \\
-4x^5 & & -4x^3 & & & & \\
\cline{1-3}
 & -x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & \\
 & x^4 & & +x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & -2x^3 & +2x^2 & & & \\
 & & 2x^3 & & +2x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & -2x^2 & & -2 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 2x & -3 &
\end{array}$$

Die Division geht genau dann auf, wenn der Rest Null ist; man nennt dann – wie bei Zahlen – das Divisorpolynom einen **Teiler** des Dividendenpolynoms. Im anderen Fall ist der Quotient kein (ganzes) Polynom[5] mehr, sondern eine gebrochenrationale Funktion, solche werden später behandelt.

Ein wichtiger Fall, in dem die Division immer aufgeht, ist der folgende: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann ist der Quotient

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}$$

stets ein (ganzes) Polynom, d. h. diese Division geht ohne Rest auf.

Denn mithilfe der geometrischen Summe zeigt man:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = a^n \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1}{\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1} = a^n \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^i = \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i},$$

was ein Polynom vom Grade $n - 1$ darstellt.

Der Grad des Ergebnispolynoms hängt bei den Operationen natürlich von Grad der beiden gegebenen Polynome ab. Bei einer Addition und auch Subtraktion kann der Grad nicht größer werden. Die beiden Monome mit den höchsten Exponenten könnten sich gerade aufheben, falls die Koeffizienten unterschiedliches Vorzeichen besitzen und vom Betrag gleich sind, so dass für die Addition und Subtraktion die Gradformel

$$\operatorname{grad}(p_n(x) + q_m(x)) \ \leq \ \max\{\operatorname{grad}(p_n(x)) + \operatorname{grad}(q_m(x))\} = \max\{n, m\}$$

gilt. Multipliziert man zwei vom Nullpolynom verschiedene Polynome miteinander, so liefert das Produkt der beiden höchsten Glieder das höchste Glied des Produktpolynoms: hat man also die Polynome

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{mit } a_n \neq 0 \\ \text{und} \quad q(x) &= \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \qquad \text{mit } b_m \neq 0 \end{aligned}$$

so hat deren Produkt die Gestalt

$$p(x) \cdot q(x) \ = \ a_n \cdot b_m \cdot x^{n+m} \ + \text{Glieder niederer Ordnung}$$

Hieraus folgt die sogenannte Gradformel für die Multiplikation zweier Polynome:

Sind $p_n(x)$ und $q_m(x)$ zwei Polynome ($\neq$ Nullpolynom) vom Grad n bzw. m, so gilt für den Grad ihres Produktes $p_n(x) \cdot q_m(x)$:

$$\operatorname{grad}(p_n(x) \cdot q_m(x)) \ = \ \operatorname{grad}(p_n(x)) + \operatorname{grad}(q_m(x)) = n \ + \ m$$

[5] Eine andere Bezeichnung für Polynome ist ganzrationale Funktionen.

Der Grad des Produktes ist die Summe der Grade der Faktoren. Entsprechend gilt für eine Division mit $n \geq m$, falls sie ganzrational machbar ist:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{p_n(x)}{q_m(x)}\right) = \operatorname{grad}(p_n(x)) - \operatorname{grad}(q_m(x)) = n - m$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}((x^3+2x+4)\cdot(3x^2+x+1)) \\
&= \operatorname{grad}(3x^5+x^4+7x^3+14x^2+6x+4) \\
&= 5 = 3+2 \\
&= \operatorname{grad}(x^3+2x+4) + \operatorname{grad}(3x^2+x+1)
\end{aligned}$$

13.2 Nullstellen und Hornerschema

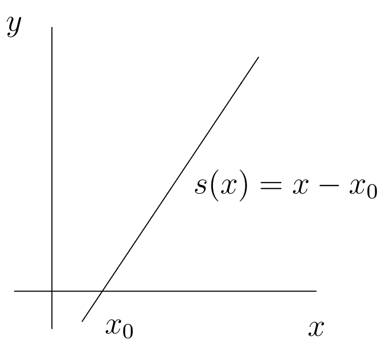
Bei der Betrachtung von Polynomen spielen Nullstellen eine wichtige Rolle [6]. Von einigen Polynomen sind die Nullstellen leicht zu ermitteln, von anderen nur sehr schwer mit evtl. numerischen Verfahren.

Einfaches Beispiel: Das zu $x_0 \in \mathbb{R}$ gehörige Polynom

$$s(x) = x - x_0$$

besitzt genau eine Nullstelle, nämlich x_0.

Wie wir gleich sehen werden, kommt Polynomen dieser Art eine besondere Bedeutung zu. Ein solches Polynom wird als der zu x_0 gehörige **Linearfaktor** bezeichnet.



Das Polynom $s(x)$ ist ein normiertes Polynom ersten Gerades, sein Schaubild ist eine Gerade, die die x–Achse an der Stelle x_0, der Nullstelle, schneidet.

[6]Es sei hier schon angemerkt, dass wir von den weiteren Überlegungen dieses Abschnitts das Nullpolynom ausnehmen; bei dem Nullpolynom sind Nullstellen nicht besonders interessant!

Bemerkenswert ist nun, dass man von einem Polynom $p_n(x)$ mit $p_n(x_0) = 0$ den Linearfaktor $x - x_0$ als Faktor abspalten kann. Es gilt folgende faktorielle Zerlegung:

Sei $p_n(x)$ ($\neq$Nullpolynom) ein Polynom n–ten Grades, und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p_n(x_0) = 0$. Dann gibt es ein Polynom $g_{n-1}(x)$ vom Grad $n - 1$ mit

$$p_n(x) \;=\; (x - x_0) \cdot g_{n-1}(x)$$

<u>Beweis</u>: Geht man von der behaupteten Gleichung aus, und teilt man ihre beiden Seiten durch $x - x_0$, so führt das für $g_{n-1}(x)$ auf den Ansatz

$$g_{n-1}(x) \;=\; \frac{p_n(x)}{x - x_0}$$

Zu zeigen ist nun, dass dieser Quotient ein (ganzes) Polynom, bzw. dass $p_n(x)$ ohne Rest durch den Linearfaktor $x - x_0$ teilbar ist. Dazu schreiben wir $p_n(x)$ wieder in der Form

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

und verwenden, dass x_0 eine Nullstelle von $p_n(x)$ ist:

$$0 \;=\; p_n(x_0) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} g_{n-1}(x) \;&=\; \frac{p_n(x) - 0}{x - x_0} \;=\; \frac{p_n(x) - p_n(x_0)}{x - x_0} \\ &=\; \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;-\; \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i \right) \\ &=\; \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i (x^i - x_0^i) \right) \\ &=\; \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{x^i - x_0^i}{x - x_0} \end{aligned}$$

Nach dem Hilfssatz auf Seite 103 sind alle Quotienten $\frac{x^i - x_0^i}{x - x_0}$ (ganze) Polynome; sie bleiben ganz, wenn man sie mit den a_i multipliziert und aufaddiert. Damit ist dann auch, wie behauptet, $g_{n-1}(x)$ ein (ganzes) Polynom ist. Es bleibt noch $\mathrm{grad}(g_{n-1}(x)) \;=\; n - 1$ zu zeigen. Wendet man dazu auf

$$p_n(x) = (x - x_0) \cdot g_{n-1}(x)$$

die Gradformel an:

$$\underbrace{\mathrm{grad}(p_n(x))}_{= n} \;=\; \underbrace{\mathrm{grad}(x - x_0)}_{= 1} + \mathrm{grad}(g_{n-1}(x))$$

so erkennt man sofort $\text{grad}(g_{n-1}(x)) = n - 1$.

qed

Bevor man einen Weg sucht, das Polynom $g_{n-1}(x)$ effektiv ausrechnen zu können, bietet sich eine kleine Verallgemeinerung an:

Sei $p_n(x)$ ($\neq$Nullpolynom) ein Polynom n–ten Grades mit $n \geq 1$; sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es ein Polynom $g_{n-1}(x)$ vom Grad $n-1$ mit

$$p_n(x) \;=\; (x - x_0) \cdot g_{n-1}(x) \;+\; p(x_0) \tag{5}$$

Hier wird nicht gefordert, dass x_0 eine Nullstelle von $p_n(x)$ ist. Man nimmt aber eine Rückführung auf diesen Fall vor, indem man setzt:

$$\hat{p}_n(x) \;=\; p_n(x) - p_n(x_0)$$

Dann ist x_0 Nullstelle des Polynoms $\hat{p}_n(x)$:

$$\hat{p}_(x_0) \;=\; p_n(x_0) - p_n(x_0) \;=\; 0$$

Nun kann man den vorherigen Satz anwenden: es gibt ein Polynom $n-1$-ten Grades $g_{n-1}(x)$ mit

$$\begin{aligned} \hat{p}_n(x) &= p_n(x) - p_n(x_0) \\ &= (x - x_0) \cdot g_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Addiert man zu beiden Seiten der Gleichung $p_n(x_0)$, so erhält man die behauptete Aussage.

Gegeben seien dazu nun

$$p_n(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{und} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$

Das Polynom $g_{n-1}(x)$ und gleichzeitig auch der Wert $p_n(x_0)$ sollen berechnet werden. Alles, was man bis jetzt weiß, ist $\text{grad}(g_{n-1}(x)) = n - 1$, man kann daher

$$g_{n-1}(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

ansetzen. Dieses setzt man in die Gleichung 5 ein:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;=\; (x - x_0) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) \;+\; p_n(x_0)$$

Ausmultiplizieren auf der rechten Seite und geeignete Umformungen liefern

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1}}_{\substack{\text{Indexverschiebung} \\ i \to i-1}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i x_0 x^i}_{\substack{\text{auf die andere} \\ \text{Seite bringen}}} + p_n(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_0 x^i = \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} x^i + p_n(x_0)$$

Fasst man noch die beiden Summenzeichen auf der linken Seite zusammen, so liefert das die Gleichung

$$a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i x_0) x^i = \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} x^i + p_n(x_0) \qquad (6)$$

Dieses ist eine Gleichung zweier Polynome; zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Koeffizienten gleich sind. Wendet man das hier an, so führt Gleichung 6 auf die Koeffizientengleichungen

$$\begin{array}{lll} b_{n-1} & = a_n & \text{die beiden höchsten Glieder} \\ b_{i-1} & = a_i + b_i x_0 & \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \\ p_n(x_0) & = a_0 + b_0 x_0 & \text{die beiden konstanten Glieder} \end{array}$$

Damit kann man nacheinander die Koeffizienten[7] $b_{n-1}, \ldots, b_0$ und schließlich auch den Wert $p_n(x_0)$ berechnen. Die Berechnung folgt dabei dem Schema (dem sogenannten **Horner-Schema**):

$$\begin{array}{c|cccccccc} & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \ldots\ a_1 & & a_0 \\ x_0 & & & b_{n-1}x_0 & & b_{n-2}x_0 & & \ldots b_1 x_0 & & b_0 x_0 \\ \hline + & b_{n-1} & \nearrow & b_{n-2} & \nearrow & b_{n-3} & \nearrow & \ldots\ b_0 & \nearrow & p_n(x_0) \end{array}$$

Beispiel 1: Gegeben seien $p_7(x) = 2x^7 + 2x^3 + 1$ und $x_0 = -2$, darauf das Horner-Schema angewandt:

	2	0	0	0	2	0	0	1
−2		−4	8	−16	32	−68	136	−272
+	2	−4	8	−16	34	−68	136	−271

Damit haben wir das Polynom $g_{n-1}(x)$ aus Gleichung 5 berechnet:

$$\begin{aligned} & 2x^7 + 2x^3 + 1 \\ & = (x+2) \cdot (2x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 16x^3 + 34x^2 - 68x + 136) - 271 \end{aligned}$$

[7]Wohl gemerkt: das Ziel, das Polynom $g_{n-1}(x)$ zu berechnen, ist erreicht, wenn die Koeffizienten von $g_{n-1}(x)$ bestimmt worden sind.

Insbesondere ist $p_7(-2) = -271$.

Beispiel 2: Wir wollen das Horner-Schema auf

$$p(x) \;=\; x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 3$$

anwenden:

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 1 & -4 & -5 & 36 & -36 \\ 3 & & 3 & -3 & -24 & 36 \\ \hline + & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

also insbesondere $p(x_0) = 0$ und genauer:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 \\ &= (x-3) \cdot \underbrace{(x^3 - x^2 - 8x + 12)}_{g_1(x)} \end{aligned} \tag{7}$$

Wir wenden das Verfahren nochmal an, diesmal auf $g_1(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ mit $x_0 = 2$:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & 2 & -12 \\ \hline + & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

also $g_1(2) = 0$ und

$$g_1(x) \;=\; (x-2) \cdot (x^2 + x - 6)$$

bzw. $g_1(x)$ in Gleichung 7 eingesetzt:

$$p(x) \;=\; (x-3)(x-2) \cdot \underbrace{(x^2 + x - 6)}_{g_2(x)} \tag{8}$$

Eine weitere Anwendung auf $g_2(x) = x^2 + x - 6$ mit nochmal $x_0 = 2$ liefert

$$\begin{array}{c|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline + & 1 & 3 & 0 \end{array} \qquad \text{also} \quad g_2(x) = (x-2) \cdot (x+3)$$

und dieses in Gleichung 8 eingesetzt

$$p(x) \;=\; (x-3)(x-2)(x-2) \cdot \underbrace{(x+3)}_{g_3(x)}$$

Der letzte Faktor $g_3(x) = x + 3 = x - (-3)$ ist selbst ein Linearfaktor, nämlich der mit Nullstelle -3. Eine nochmalige[8] Anwendung des Verfahrens auf $g_3(x)$ mit $x_0 = -3$ lieferte die triviale Zerlegung

$$g_3(x) \;=\; (x+3) \cdot 1$$

Der letzte Faktor $g_4(x) = 1$ hat als konstante Funktion $\neq 0$ natürlich keine Nullstellen.

In der gewonnenen Zerlegung

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 \\ &= (x-3)(x-2)(x-2)(x+3) \\ &= (x-3)(x+3)(x-2)^2 \end{aligned}$$

erscheint der Linearfaktor $x - 2$ mit Exponentem 2, er war zweimal als Teiler in $p(x)$ enthalten. Man nennt daher $x_0 = 2$ eine **doppelte** - oder **zweifache Nullstelle** von $p(x)$; allgemein:

Sei $p_n(x)$ ein Polynom vom Grade n, $n > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt k–**fache Nullstelle** oder Nullstelle der Ordnung (Vielfachheit) k von $p(x)$, falls es ein Polynom $g(x)$ mit $g(x_0) \neq 0$ gibt, so dass gilt

$$p(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$$

Die Forderung $g(x_0) \neq 0$ soll sicherstellen, dass x_0 nicht sogar eine $(k+1)$–fache Nullstelle von $p_n(x)$ ist.

Wegen seiner gut rechnerischen Eigenschaften lohnt es sich sogar, das Horner-Schema auch dann einzusetzen, wenn man nur an dem Funktionswert $p_n(x_0)$ interessiert ist. Die dazu im Hornerschema notwendigen Rechenschritte kann man sich auch folgendermaßen veranschaulichen:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + a_{n-3} x_0^{n-3} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= (a_n x_0 + a_{n-1}) x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + a_{n-3} x_0^{n-3} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= ((a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + a_{n-2})\, x_0^{n-2} + a_{n-3} x_0^{n-3} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= (((a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + a_{n-2})\, x_0 + a_{n-3})\, x_0^{n-3} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= \ldots \\ &= (\ldots(((a_n x_0 + a_{n-1}) x_0 + a_{n-2})\, x_0 + a_{n-3})\, x_0 + \ldots + a_1)\, x_0 + a_0 \end{aligned}$$

Von innen nach außen gesehen entsprechen die Klammerwerte genau den Zwischenergebnissen im Horner-Schema. Im Vergleich zum ersten (normalen) Polynomausdruck sind im geklammerten Ausdruck, welcher dem Horner-Schema entspricht, weit weniger Multiplikationen notwendig.

13.3 Anzahl von Nullstellen

Wir wollen erkennen, dass ein Polynom nur eine beschränkte Anzahl von Nullstellen besitzen kann, und wir wollen daraus eine wichtige Folgerung ziehen.

Wir kommen dazu noch einmal auf die Beispiele (siehe Seite 108) mit dem Polynom

$$p(x) \quad = \quad x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$$

zurück. Nacheinander wurden die folgenden Abspaltungen von Linearfaktoren vorgenommen:

$$\begin{array}{lll}
p(x) = (x-3) \cdot g_1(x) & \text{mit} & g_1(x) = x^3 - x^2 - 8x - 12 \\
p(x) = (x-3)(x-2) \cdot g_2(x) & \text{mit} & g_2(x) = x^2 + x - 6 \\
p(x) = (x-3)(x-2)^2 \cdot g_3(x) & \text{mit} & g_3(x) = x + 3 \\
p(x) = (x-3)(x-2)^2(x+3) \cdot g_4(x) & \text{mit} & g_4(x) = 1
\end{array}$$

Bei jedem Schritt sinkt der Grad des verbleibenden Faktors $g_i(x)$ um 1. Wenn so der Grad 0 erreicht wird, ist der verbleibende Faktor ein konstantes Polynom ($\neq$ Nullpolynom), von dem ein weiterer Linearfaktor nicht mehr abgespalten werden kann. Es sind daher nur $4 = \text{grad}(p(x))$ Abspaltungen möglich.

Ein solcher Sachverhalt trifft auch bei einem beliebigen Polynom zu: Hat das Polynom $p(x)$ den Grad n, so kann von ihm höchstens n Mal ein Linearfaktor abgespalten werden; nach n Abspaltungen hat der letzte verbleibende Faktor den Grad 0 und ist somit konstant. In einem Polynom vom Grade n sind daher höchstens n Linarfaktoren als Teiler enthalten.

Da zu jeder Nullstelle mindestens ein Linearfaktor gehört[9], folgt daraus: Das Polynom $p(x)$ vom Grade n hat höchstens n Nullstellen.

Berücksichtigt man jetzt auch noch die Vielfachheit der Nullstellen und beachtet man, dass zu einer Nullstelle der Vielfachheit k ein genau k Mal als Teiler vorkommender Linearfaktor gehört, so ist man auf einen der wichtigsten Sätze der Mathematik gestoßen:

Satz: Sei $p(x)$ ein Polynom, das nicht gleich dem Nullpolynom ist. Ist $n = \text{grad}(p(x))$, so hat $p(x)$ höchstens n Nullstellen; dabei wird jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt.

In unserem Beispiel mit

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 \quad = \quad (x-3)(x+3)(x-2)^2$$

sind mit Vielfachheit 1 die Nullstellen $+3$ und -3 sowie mit Vielfachheit 2 die Nullstelle $+2$ vorhanden. Die Vielfachheiten zusammen ergeben

$$4 \;=\; \text{grad}(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36)$$

[9]aufgrund des Satzes auf Seite 105

Dieser Satz hat bedeutsame Konsequenzen, u. a.:

Satz: Sind $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome mit

$$\mathrm{grad}(p(x)) \;\leq\; n \qquad \text{und} \qquad \mathrm{grad}(q(x)) \;\leq\; n$$

und gibt es $n+1$ verschiedene Zahlen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$p(x_i) \;=\; q(x_i) \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

so folgt $p(x) \equiv q(x)$[10]

Beweis: Man betrachte das Differenzpolynom

$$h(x) \;=\; p(x) - q(x)$$

Offensichtlich ist $\mathrm{grad}(h(x)) \leq n$. (Höhere Potenzen als in $p(x)$ und $q(x)$ können in $h(x)$ nicht vorkommen.) Wäre nun $h(x)$ nicht das Nullpolynom, so hätte $h(x)$ aufgrund des vorherigen Satzes höchstens n verschiedene Nullstellen.

$h(x)$ besitzt jedoch $n+1$ verschiedene Nullstellen:

$$\begin{array}{rl} & h(x_i) \;=\; p(x_i) - q(x_i) \;=\; 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, n+1 \\ \Rightarrow & h(x) \text{ kann nur das Nullpolynom sein.} \\ \Rightarrow & h(x) \;=\; p(x) - q(x) \;\equiv\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad p(x) \;\equiv\; q(x) \end{array}$$

qed

Dieser Satz besagt etwa:

- Ein Polynom $p(x)$ mit $\mathrm{grad}(p(x)) \leq n$ ist durch $n+1$ Werte

  $$p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_{n+1})$$

  eindeutig bestimmt.
- Ein (lineares) Polynom $p(x) = ax + b$ ist durch zwei Werte eindeutig bestimmt.
- Ein quadratisches Polynom

  $$p(x) \;=\; ax^2 + bx + c$$

  ist durch drei Werte $p(x_1), p(x_2), p(x_3)$ festgelegt.

  Es lässt sich allerdings sehr wohl ein Polynom dritten Grades $q(x)$ mit

  $$\begin{array}{rrcll} & q(x) & \not\equiv & p(x) & \\ \text{und} & q(x_i) & = & p(x_i) & \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \end{array}$$

  finden, nämlich etwa

  $$q(x) \;=\; p(x) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

[10] D. h.: $p(x)$ und $q(x)$ haben dieselben Koeffizienten.

13.4 Hinweise zum Fundamentalsatz der Algebra

Zwei schwieriger zu behandelnde Fragen sind die folgenden:

1. Hat ein Polynom n-ten Gerades mit Vielfachheit genau n Nullstellen?
2. Wie kann man die Nullstellen eines Polynoms finden?

Zu Frage 1.: Die Antwort ist leider „nein“. Beispiel: Das (berüchtigte) Polynom

$$p(x) \;=\; x^2 + 1$$

hat keine Nullstellen, obwohl sein Grad 2 beträgt; es ist immer $p(x) \geq 1$. Dieser Sachverhalt verleitete zur Einführung der **komplexen Zahlen** (siehe später). Alles, was man für (reelle) Polynome in diesem Zusammenhang weiß, ist der folgende

Satz: (Fundamentalsatz der Algebra, reelle Schreibweise) Sei $p(x)$ ein Polynom n-ten Grades. Dann gibt es

$$x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{R} \quad \text{und Polynome} \quad g_1(x), \ldots, g_k(x)$$

mit $\operatorname{grad}(g_i(x)) = 2$ und $g_i(x)$ ohne Nullstelle für $i = 1, \ldots, k$, so dass

$$p(x) \;=\; (x - x_1) \cdots (x - x_l) \cdot g_1(x) g_2(x) \cdots g_k(x).$$

ist.

Der Beweis dieses Satzes ist umfangreich und schwierig, er soll hier nicht gebracht werden. Auf die Aussage des Satzes werden wir jedoch später im Zusammenhang mit der Partialbruchzerlegung und Integration gebrochen rationaler Funktionen zurückkommen.

Zu Frage 2.: Auch hier ist die Antwort nicht sehr befriedigend:

Für die Nullstellen der Polynome ersten und zweiten Grades gibt es einfache Formeln; bei Polynomen dritten und vierten Grades existieren noch Formeln, die jedoch sehr komplizert sind (siehe Formelsammlungen) und selten verwendet werden. Für allgemeine Polynome fünften oder höheren Grades gibt es jedoch – wie man beweisen kann – keine Formeln zur Berechnung ihrer Nullstellen. Man ist hier auf numerische Lösungsverfahren[11] angewiesen.

[11] Numerische Lösungsverfahren verwendet man üblicherweise auch bei Gleichungen dritten und vierten Grades.

14 Gebrochen rationale Funktionen

14.1 Definition und Grundbegriffe

Seien p_n und q_m zwei Polynome mit den Graden $n = \text{grad}(p_n)$ und $m = \text{grad}(q_m)$. Dann heißt die Funktion

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

eine **gebrochen rationale Funktion**. Ist der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ($n < m$), so heißt f **echt** gebrochen, andernfalls ($n \geq m$) **unecht** gebrochen.

Eine gebrochen rationale Funktion ist genau an den Stellen definiert, an denen der Nenner von Null verschieden ist:

$$D_{\text{max}} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\, q_m(x) \neq 0\}\,.$$

Bemerkungen: Sei $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ eine gebrochen rationale Funktion.

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ ist (k-fache) **Nullstelle** der gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$, wenn x_0 (k-fache) Nullstelle von p_n und dabei $q_m(x_0) \neq 0$ ist.
2. $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt (k-fache) **Polstelle** von f, falls $p_n(x_0) \neq 0$ und x_0 eine (k-fache) Nullstelle des Nenners q_m ist.
3. $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Lücke** oder Unbestimmtheitstelle von f, falls $p_n(x_0) = q_m(x_0) = 0$ ist.

Beispiel :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

f ist eine unecht gebrochen rationale Funktion mit $p_1(x) = x - 1$, $q_1(x) = x + 2$

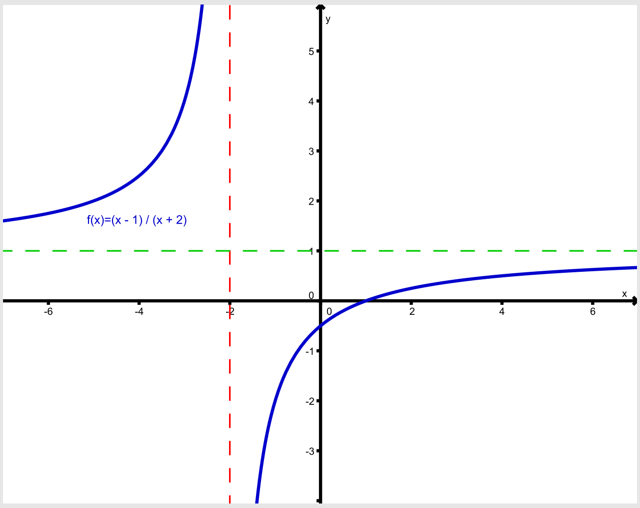
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$

Nullstelle: $x = 1$, Polstelle: $x = -2$

Zerlegung in Polynom (Asymptote) und Polstellenanteil:
$\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x+2-3}{x+2} = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

Asymtote: $f(x) \to 1$, falls $x \to \pm\infty$

Funktionsgraph:



14.2 Zerlegung mit Polynomdivision

Jede unecht gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ mit $n \geq m$ besitzt eine Darstellung der Form

$$f(x) = s_{n-m}(x) + \frac{r_k(x)}{q_m(x)}$$

mit einem Polynom $s_{n-m}(x)$ vom Grade $n - m$ und einer echt gebrochen rationalen Funktion $\dfrac{r_k(x)}{q_m(x)}$ vom Grade k, d. h. mit $\text{grad}(r_k) < \text{grad}(q_m)$, d. h. $k < m$. Jede unecht gebrochen rationale Funktion läst sich also additiv aufteilen in ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion. Das Polynom fungiert als **Asymptote** der gebrochen rationalen Funktion f und diktiert das Verhalten der Funktion im Unendlichen. Echt gebrochen rationale Funktionen gehen für $x \to \pm\infty$ gegen Null.

Diese Darstellung folgt direkt aus der bereits oben angesprochenen **Polynomdivision mit Rest**. Sind nämlich zwei Polynome $p_n(x)$ und $q_m(x)$ gegeben, wobei $q_m(x)$ nicht das Nullpolynom ist, so gibt es dazu zwei Polynome $r_{n-m}(x)$ vom Grade $n - m$ und $s_k(x)$ vom Grade k mit

$$\begin{aligned} & \text{grad}(r) < \text{grad}(q_m) \\ \text{und} \quad & p_n(x) = s_{n-m}(x) q_m(x) + r_k(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teilt man beide Seiten der letzten Gleichung durch $q_m(x)$, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{s_{n-m}(x)q_m(x) + r_k(x)}{q_m(x)} \\ &= \frac{s_{n-m}(x)q_m(x)}{q_m(x)} + \frac{r_k(x)}{q_m(x)} \\ &= s_{n-m}(x) + \frac{r_k(x)}{q_m(x)} \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist dabei wegen $k < m$ eine echt gebrochen rationale Funktion.

Beispiel 1:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2},\ p_2(x) = x^2,\ q_2(x) = (x+1)^2$$

f ist eine unecht gebrochen rationale Funktion mit $\mathrm{grad}(p_2) = \mathrm{grad}(q_2) = 2$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

Nullstellen: $x_1 = 0$: 2-fache Nullstelle, Polstellen: $x = -1$: 2-fache Polstelle

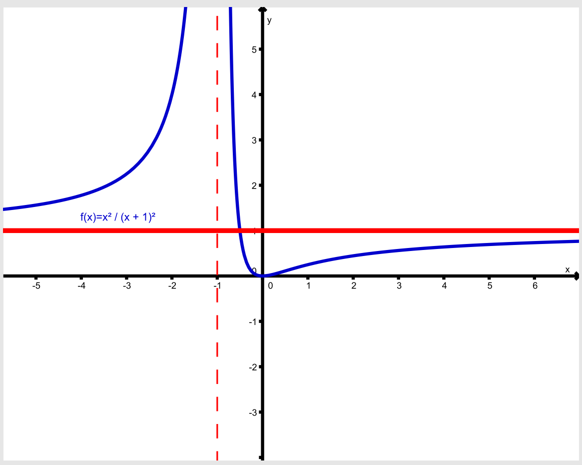
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2\big) : \big(x^2 + 2x + 1\big) = 1 + \dfrac{-2x-1}{x^2+2x+1} \\ \underline{-\,x^2 - 2x - 1} \\ \qquad -\,2x - 1 \end{array}$$

$s_0(x) = 1,\ r_1(x) = -2x - 1$

Asymtote: $s_0(x) = 1$, d. h. $f(x) \to 1$, falls $x \to \pm\infty$

Funktionsgraph:



Beispiel 2:

$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{4x}$, $p_3(x) = x^3 - 8$, $q_1(x) = 4x$

f ist eine unecht gebrochen rationale Funktion mit $\mathrm{grad}(p_3) = 3,\ \mathrm{grad}(q_1) = 1$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

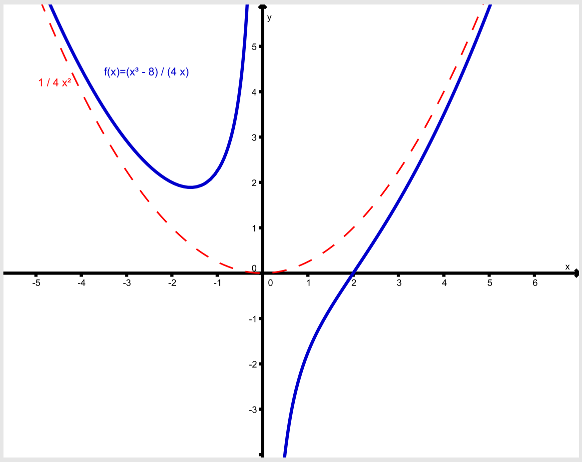
Nullstellen: $x^3 - 8 = 0$, d.h. $x^3 = 8$, also $x = \sqrt[3]{8} = 2$: 1-fache Nullstelle

Polstellen: $x = 0$: 2-fache Polstelle

Polynomdivision: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{8}{4x}, \qquad s_2(x) = 4x^2,\ r_0(x) = -8$

Asymtote: $s_2(x) = 0.25\ x^2$, insbesondere: $f(x) \to +\infty$, falls $x \to \pm\infty$

Funktionsgraph:



14.3 Partialbruchzerlegung

Die Behandlung unecht gebrochen rationaler Funktionen kann auf Grund der Polynomdivision auf die Betrachtung von Polynomen und und der Behandlung echt gebrochen rationaler Funktionen zurückgeführt werden. Eine weitere für spätere Zwecke sehr sinnvolle Zerlegung ist die einer größeren echt gebrochen rationalen Funktion in kleinere echt gebrochen rationale Einheiten. Das Mittel dazu ist die sogenannte **Partialbruchzerlegung**, die im Folgenden für den Fall untersucht wird, dass das Nennerpolynom vollständig in Linearfaktoren mit verschiedenen Nullstellen zerfällt. Sei dazu $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$, $n < m$

eine echt gebrochen rationale Funktion mit

$$q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$$

mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Ein eventuell vorhandener Koeffizient $a_m \neq 1$ lässt sich ausklammern und zum Zähler schlagen.
Die Partialbruchzerlegung besagt nun, dass Zahlen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ derart existieren, dass gilt:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_m}{x - x_m}$$

Die Zahlen $A_1, \ldots, A_m$ können dadurch berechnet werden, dass die rechte Seite mit den Unbekannten gleichnamig gemacht und die beiden Zähler links und rechts gleichgesetzt werden. Hieraus ergeben sich Koeffizientengleichungen, die zu lösen sind.

Beispiel 1: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 3} = \dfrac{x}{(x-3)(x+1)}$
3 und -1 sind die Nullstellen des Nenners und man macht den Ansatz:

$$\frac{x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+1}$$

Gleichnamig gestalten durch Multiplikation mit dem Nenner ergibt

$$x = A_1(x+1) + A_2(x-3) = (A_1 + A_2)x + A_1 - 3A_2 \tag{9}$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem Gleichungssystem in dem Fall aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte A_1 und A_2:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 - 3A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Subtraktion der Gleichungen liefert $-4A_2 = -1$, d.h. $A_2 = \frac{1}{4}$ und damit $A_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+1)} = \frac{3}{4}\frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)}$$

Eine manchmal schnellere Berechnungsmöglichkeit für die Werte A_1 und A_2 ergibt sich dadurch, dass in Gleichung (7) als besondere x-Werte die Polstellen eingesetzt werden (Polstellenmethode). Dadurch ergeben sich die beiden Lösungen sogleich:

$$\begin{aligned} x = +3: &\quad \to 3 = \ 4A_1 &\quad \to A_1 = \frac{3}{4} \\ x = -1: &\quad \to -1 = -4A_2 &\quad \to A_2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 2: $f(x) = \dfrac{x+10}{x^2+5x} = \ldots = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+5}$

15 Wurzelfunktionen

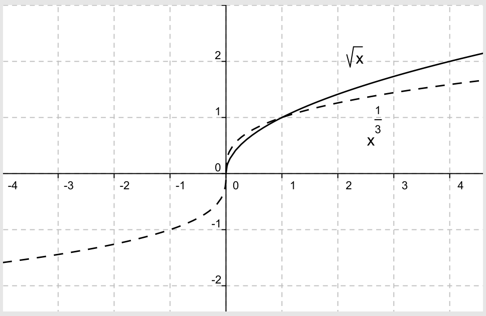
Wurzelfunktionen sind - wie oben schon angedeutet- Umkehrfunktionen der Potenzfunktion x^n mit natürlichem Exponenten n

$$f : D \to \mathbb{R},\ y = f(x) = \sqrt[n]{x}$$

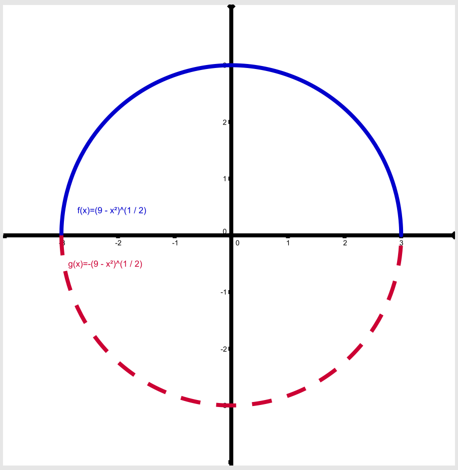
Wurzelfunktionen kommen häufig "kombiniert"mit anderen Funktionen vor. Im Definitionsbereich muss natürlich berücksichtigt sein, dass der Radikand, also der Term unter der Wurzel, stets nicht negativ ist, außer wenn eine ungerade Wurzel gezogen wird(z.B. $\sqrt[3]{-8} = -2$).

Beispiele:

1. $n = 2,\ D = \mathbb{R}^{\geq 0},\ y = \sqrt{x}$
   $n = 3,\ D = \mathbb{R}, y = \sqrt[3]{x}$



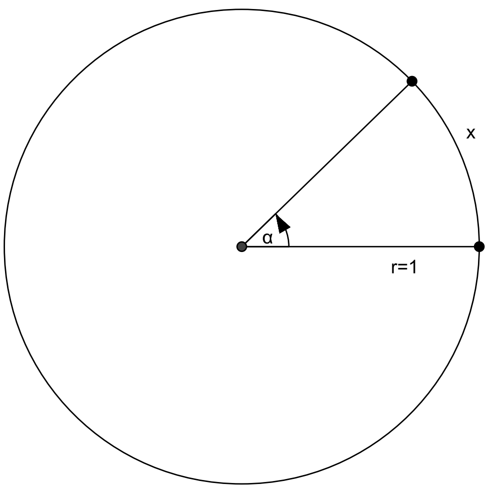
2. Wurzelfunktionen spielen bei der schon bekannten Kreisgleichung eine Rolle, wenn diese nach dem Funktionswert y aufgelöst wird, beispielsweise der Kreis um (0,0) mit Radius 3: $x^2 + y^2 = 9$. Die Auflösung nach y führt zu zwei Funktionen
   1. $y = f_1(x) = \sqrt{9 - x^2},\quad D_{f_1} = [-3, 3],\ W_{f_1} = [0, 3]$
   2. $y = f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2},\ D_{f_2} = [-3, 3],\ W_{f_2} = [-3, 0]$
   welche die obere und untere Kreishälfte beschreiben.



16 Trigonometrische Funktionen

16.1 Beschreibung des Winkels durch Grad- und Bogenmaß

Für geometrische Untersuchungen benötigt man Längenangaben und Winkelangaben. Längen sind einfache reelle Zahlen, die als Ergebnisse von Längenmessungen resultieren. Bei der Winkelmessung ist die Sache etwas komplizierter. Wir sind gewohnt, die Winkel in Gradmaß (°) anzugeben, wobei ein Vollkreis 360° entspricht. Das Vorzeichen beschreibt dabei die Drehrichtung. Positive Winkel markieren eine Drehbewegung gegen den Uhrzeigersinn, negative mit dem Uhrzeigersinn.
Eine weitere und auch sehr gebräuchliche Möglichkeit ist die Beschreibung des Winkels durch Längenangabe des Kreisbogens mit dem Radius 1, der dem Winkel gegenüber liegt.



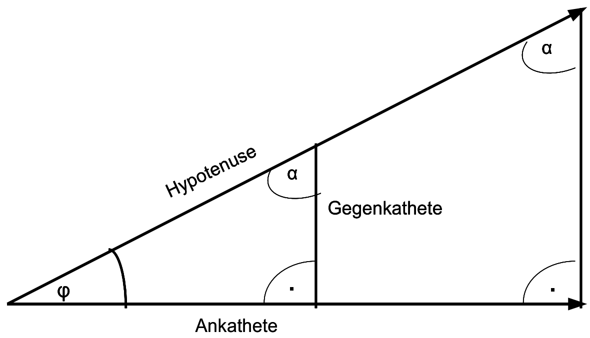
Bekanntlich hat ein Vollkreis von 360° mit Radius 1 einen Umfang von 2π. Demzufolge besitzt der dem Winkel α gegenüberliegende Bogen die Länge

$$x = \frac{2\pi}{360°}\alpha = \frac{\pi}{180°}\alpha, \quad \alpha = \frac{180°}{\pi}x$$

Man sagt: x ist der Winkel im Bogenmaß. Einige wichtige Umrechnungswerte sind in der folgenden Tabelle angegeben

α	0	90°	180°	270°	360°	720°	−45°
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	4π	$-\frac{\pi}{4}$

16.2 Winkelfunktionen im Dreieck



Nach dem Strahlensatz gibt es eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Winkel φ und dem Verhältnis zweier Seitenlängen, z.B. Gegenkathete/Hypotenuse. Dies führt zur Definition der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Kotangens.

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}, \quad \cot(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Da die Katheten immer kleiner gleich der Hypotenuse sind, liegen die Sinus- und Cosinuswerte alle zwischen -1 und 1. Übliche Taschenrechner haben die Werte der Winkelfunktionen in beide Richtungen implementiert, so dass man vom gegebenen Seitenverhältnis auf die Winkel und vom Winkel auf die Seitenverhältnisse schließen kann.

Beispiele zur Dreiecksberechnung:

1. Im Dreieck mit den Seiten $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$ gilt für den Winkel β (dem Winkel der Seite b gegenüber):

$$\sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \beta = \arcsin\frac{4}{5} = \arcsin 0.8 = 53,13°$$

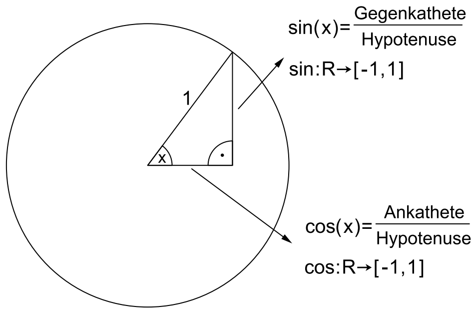
2. Gelte für ein rechtwinkliges Dreieck mit üblicher Notation $a = 4$ und $\alpha = 30°$. Man berechne die restlichen Größen.

   Für die Winkel gilt $\beta = 90° - 30° = 60°$, $\gamma = 90°$
   Für die Seiten findet man

$$b = a \tan\beta = 4\tan 60° = 6.93 \quad c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{4}{\cos 60°} = 8$$

Hinweis: tan und cot besitzen Polstellen und eine veränderte Periode!

16.3 Definition am Einheitskreis und wichtige Eigenschaften



Da die Hypotenuse die Länge 1 besitzt, entspricht der Sinuswert genau der Ordinate des Punktes auf dem Einheitskreis und der Kosinuswert der Abszisse des Punktes. In Abhängigkeit vom Winkel α (Gradmaß) bzw. x (Bogenmaß) ändern sich diese Werte zwischen -1 und 1. Im Folgenden werden einige wesentliche Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sin und cos aufgelistet, die sich zum Teil direkt am Kreis ablesen lassen.

1. Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

2. Formel nach Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

3. Periode: 2π, d.h. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

   Verändert man den Winkel um π, so wechselt das Vorzeichen:
   $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

4. Maxima vom sin: $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   Maxima vom cos: $x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. Minima vom sin: $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   Minima vom cos: $x_k = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6. Nullstellen vom sin: $x_k = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
   Nullstellen vom cos: $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

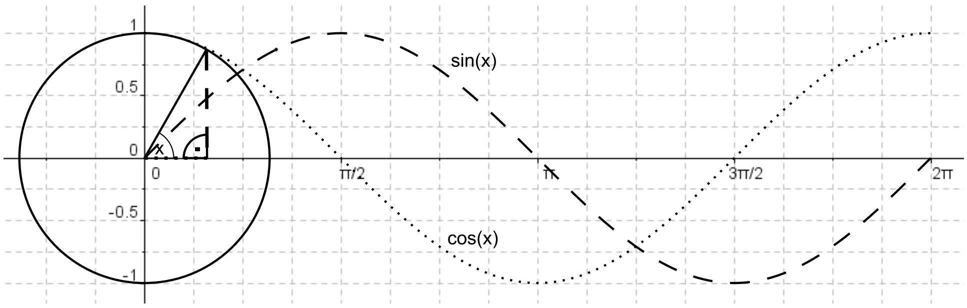
7. Lässt man den Punkt auf dem Einheitskreis gegen und mit der Uhrzeigerrichtung laufen, so erkennt man folgende wichtige Symmetrien.

   Die sin-Funktion ist ungerade, d.h. es gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$
   Die cos-Funktion ist gerade, d.h. es gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$

8. Beschränktheit
   Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
   $$-1 \leq \sin(x), \cos(x) \leq 1$$

9. Der Sinus folgt dem Cosinus hinterher und bzw. oder anders herum; es gelten die Umrechnungen:
   $$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}), \quad \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

10. Skizze:



Beim Lösen **trigonometrischer Gleichungen** benötigt man bereits die Umkehrfunktionen (s.später) und muss die Periodizität beachten.

Beispiel 1 Man löse die Gleichung

$$\sin(2x + 4) = 0$$

Für die Nullstellen der Sinusfunktion gilt: $2x + 4 = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Aufgelöst nach x erhält man also die unendlich vielen Lösungen $x_n = n\frac{\pi}{2} - 2$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 2 Man suche reelle Lösungen der Gleichung

$$\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dem Kurvenverlauf des Sinus entnehmen wir, dass es zwei Lösungen im Intervall $[0, 2\pi)$ gibt, nämlich $x = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ und $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$.
Beide Lösungen sind periodisch fortzusetzen, sodass sich folgende Lösungen für ganz $\mathbb{R}$ ergeben:
$x_{1k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ und $x_{2k} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Ausgangspunkt für viele weitere Formeln und Zusammenhänge sind die sogenannten **Additionstheoreme** für sin und cos.
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben sich durch geschickte Anwendungen der Strahlensätze, auf die Beweise sollen hier verzichtet werden. Später, wenn ein weiterer Zugang zu den trigonometrischen Funktionen eröffnet wird, ergeben sie sich aus Regeln zur Potenzrechnung.
Mit $x = y$ ergeben sich die Verdopplungsformeln

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x \cos y \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

Weitere Zusammenhänge findet man auf den Übungsblättern und in bekannten Formelsammlungen.

16.4 Harmonische Schwingungen

Die Funktionen sin und cos dienen insbesondere zur Beschreibung periodischer physikalischer Vorgänge. Im einfahsten Fall sind diese Verzerrungen einer Sinus- oder Cosinusfunktion und besitzen dann die Darstellung

$$y(x) = a\sin(bx + c)$$

oder in eher physikalischer Notation

$$y(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Solche Funktionen bzw. Vorgänge heißen **harmonische Schwingungen**.
Dabei bezeichnen:

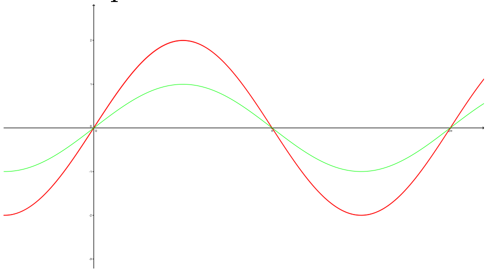
a, A: Amplitude

b, ω: Kreisfrequenz, $\dfrac{b}{2\pi} = \omega$: Frequenz

c, φ: Phase

Sie bedeuten folgendes:

a) Amplitude
Die Amplitude a bzw. A bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung



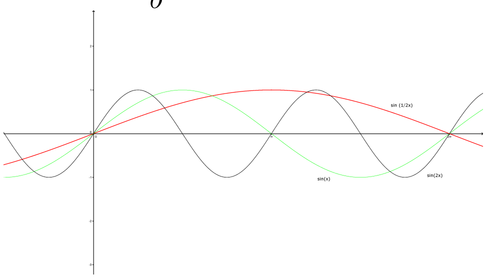
b) Kreisfrequenz
Die Kreisfrequenz b bzw. ω bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung. Hierdurch verändert sich die Periode:

$$y = \sin x \rightarrow \text{ Periode } \; 2\pi$$

$$y = \sin bx \rightarrow \text{ Periode } \; \frac{2\pi}{b}$$

denn:

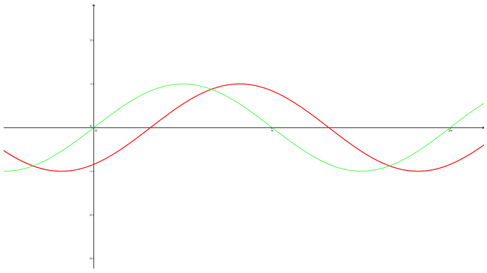
$$\sin(b(x + \frac{2\pi}{b})) = \sin(bx + 2\pi) = \sin bx$$



c) Phase
Die Phase bewirkt eine Verschiebung der gesamten Kurve in x-Richtung.

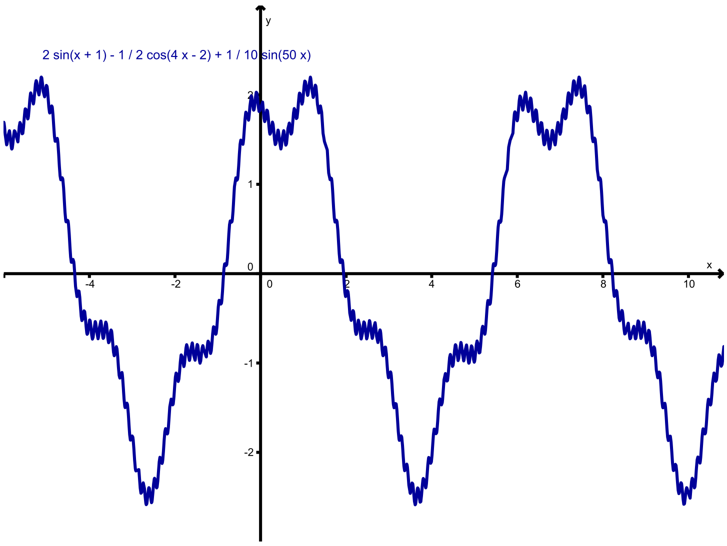
$$c > 0 \rightarrow \text{Verschiebung nach links}$$

$$c < 0 \rightarrow \text{Verschiebung nach rechts}$$



Rein harmonische Schwingungen kommen in Anwendungen nur sehr selten vor, oft jedoch können periodische Signale als Überlagerung (Superposition) harmonischer Schwingung modelliert werden. Derartige Beschreibung macht man in der Fourieranalyse. Einen Eindruck einer Überlagerung dreier harmonischer Schwingungen gibt das folgende Bild. Es beschreibt die Funktion

$$f(x) = 2\sin(x+1) - \frac{1}{2}\cos(4x-2) + \frac{1}{10}\sin(50x)$$



16.5 Tangens- und Kotangensfunktion

Aus den Sinus- und Cosinusfunktionen werden zwei weitere Funktionen, die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion abgeleitet.

1. Tangensfunktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \text{ im rechtwinkligen Dreieck}\right)$$

2. Kotangensfunktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \left(\tfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \text{ im rechtwinkligen Dreieck}\right)$$

Es folgen einige Eigenschaften, die sich größtenteils aus den Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion ableiten lassen.

a) Symmetrie: tan und cot sind ungerade Funktionen.

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\cos x$$

b) Polstellen:

$$\tan : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot : x = k\pi$$

c) Periode: Anders als sin und cos besitzen sie die Periode π.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

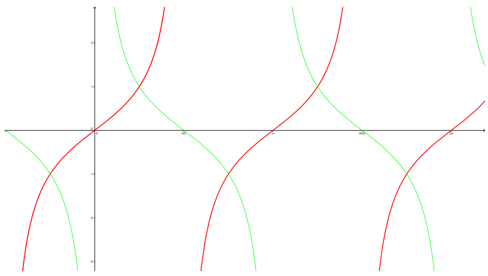
$$\cot(x + \pi) = \ldots = \cot x$$

d) Additionstheorem: s. Übungsaufgaben

$$\tan(x_1 + x_2) = \ldots = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

$$\cot(x_1 + x_2) = \ldots = \frac{\cot x_1 \cot x_2 - 1}{\cot x_1 \cot x_2}$$

e) Graph:

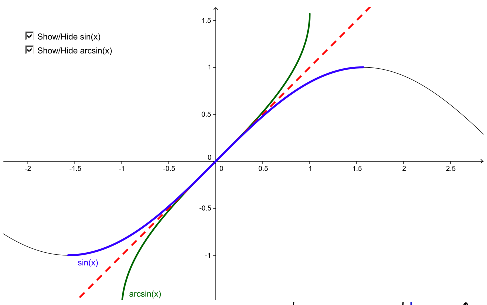


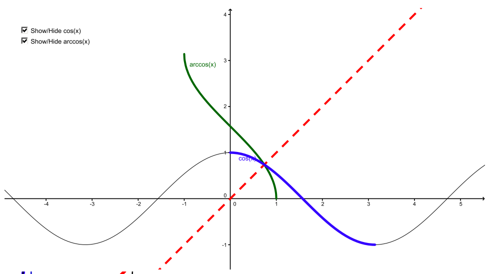
16.6 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

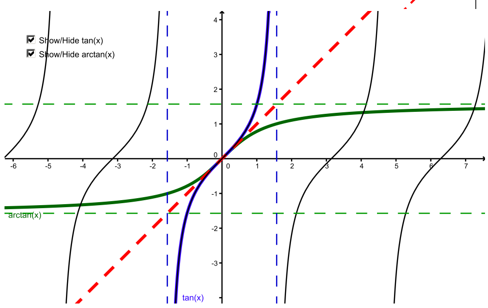
Die trigonometrischen Funktionen sind insbesondere als periodische Funktionen, die sich ja dadurch auszeichnen, dass sich Funktionswerte wiederholen, zunächst nicht umkehrbar. Man erreicht Umkehrbarkeit dadurch, dass man sich auf ein möglichst großes Hauptintervall beschränkt, in dem alle Funktionswerte genau einmal vorkommen. Die sich dann ergebenden Umkehrfunktionen heißen auch **Arkusfunktionen** (Arkus: Bogen). Sie geben als Funktonswerte den Winkel bzw. Bogenwert zurück.

$$\begin{array}{lll}
\sin: & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1],\ y=\sin(x) & \Rightarrow \arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ y=\arcsin(x) \\
\cos: & [0,\pi] \to [-1,1], \quad y=\cos(x) & \Rightarrow \arccos: [-1,1] \to [0,\pi],\ y=\arccos(x) \\
\tan: & (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ y=\tan(x) & \Rightarrow \arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ y=\arctan(x) \\
\cot: & (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad y=\cot(x) & \Rightarrow \operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to (0,\pi),\ y=\operatorname{arccot}(x)
\end{array}$$

Ihr Funktionsgraphen ergeben sich als Spiegelung der beschränkten trigonometrischen Funktionen an der Winkelhalbierenden.







Aufgrund der Umkehrfunktionalität gilt für alle vier Funktionen $f \circ f^{-1}(x) = x$ und $f^{-1} \circ f(x) = x$, d.h. zum Beispiel für sin und cos bei passenden x-Werten:
$\sin(\arcsin(x)) = x$ und $\arcsin(\sin(x)) = x$
$\cos(\arccos(x)) = x$ und $\arccos(\cos(x)) = x$

Auch für die Arkusfunktionen gelten etliche Formeln, so findet man etwa für die Verkettung von Winkelfunktion und Arkusfunktion:

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

für $x \in [-1, 1]$. Die Umrechnung vom sin in cos gelingt mir der Formel $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Die positive Wurzel ist deshalb zu nehmen, weil der sin im Wertebereich $[0, \pi]$ des arccos positiv ist. Analog gilt

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

für $x \in [-1, 1]$.

Die Arcus-Funktonen werden immer dort verwendet, wo die Argumente (Winkel) gegebener trigonometrischer Werte gesucht werden. Ein Taschenrechner zeigt lediglich den Winkel aus dem Hauptintervall an. Sind jedoch alle Lösungen anzugeben, so ist die Periodizität zu beachten.

Beispiele:

a) $3 \sin x = \sqrt{3} \cos x, \quad x = ?$

$3 \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$, d.h. $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen.
Im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ existiert genau eine Lösung, nämlich:

$x = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

Die Lösungsmenge lautet:

$L = \{\dfrac{\pi}{6} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = ?$

$L = \{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\} \vee \{\dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

17 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Als **allgemeine Exponentialfunktion** mit der Basis $a \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$, bezeichnet man die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Typ:

$$y = a^x.$$

Exponentialfunktionen sind sehr wichtige Funktionen, die immer dann ins Spiel kommen, wenn es um die Beschreibung von Wachstums- oder Zerfallsprozessen geht, in denen der Zuwachs oder die Abnahme einer Größe proportional zum aktuellen Funktionswert steht. Eine Erhöhung des x-Wertes um 1 führt beispielsweise zu einer Veränderung des Funktionswertes von:

$$\Delta y = a^{x+1} - a^x = a^x \cdot a - a^x = a^x(a-1) = (a-1) \cdot y \sim y$$

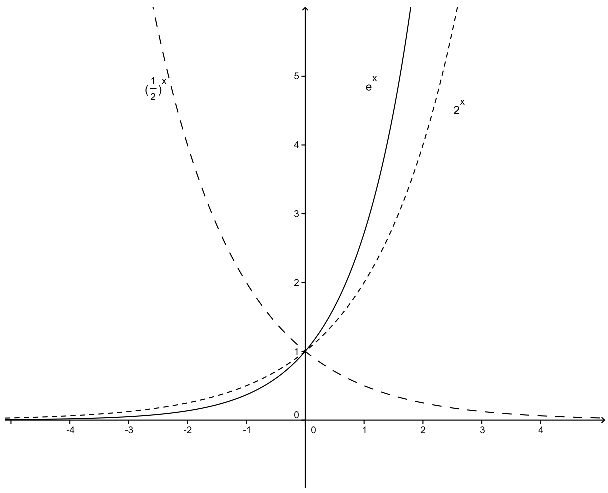
Ist der Proportionalitätsfaktor $a-1$ größer als 0, d.h. $a>1$, so findet Wachstum statt, für $a-1<0$, d.h. $a<1$, Zerfall.
Es wird sich zeigen, dass die Exponentialfunktion zur Basis der Eulerschen Zahl $e = 2,71828...$, also

$$f(x) = e^x$$

von besonderer Bedeutung ist. Sie heißt **natürliche Exponentialfunktion**. Jede andere Exponentialfunktion kann mit Hilfe von Logarithmen auf die natürlichen Exponentialfunktion umgeschrieben werden

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$$

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen einiger Exponentialfunktionen.



Dem Graphenverlauf können wir einige Eigenschaften der Exponentialfunktionen ablesen

1. Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, Wertebereich $W = \mathbb{R}^{>0}$
2. Für $a > 1$ ist sie monoton steigend, für $a < 1$ monoton fallend.
3. Alle Exponentialfunktionen sind Linkskurven.
4. Gemeinsamer Kurvenpunkt ist (0,1).
5. Für $a > 1$ gilt: $a^x \to \infty$, falls $x \to \infty$ und $a^x \to 0$, falls $x \to -\infty$.
   Für $a < 1$ gilt: $a^x \to 0$, falls $x \to \infty$ und $a^x \to \infty$, falls $x \to -\infty$.
6. Speziell für die e-Funktion gilt die Abschätzung: $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Die breite Verwendungsmöglichkeit der Exponentialfunktionen deuten die folgenden Beispiele an.

Beispiele

1. Kapitalverzinsung
   Ein Anfangskapital K, welches zu einem festen Zinssatz von $p\%$ für n Jahre angelegt wird, vermehrt sich gemäß der Zinseszinsformel

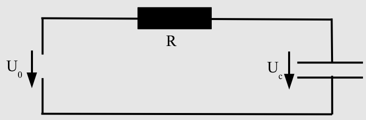
$$K_n = K \cdot (1+p)^n$$

   Die Exponentialfunktion spiegelt also den Zinseszinseffekt wieder. Hätte man beispielsweise im Jahre Null an Christi Geburt auf ein Sparbuch 1 Cent bei einem Zinssatz von nur 3% angelegt, so wäre dieser Cent bis heute, $n = 2012$, auf ein Kapital von

$$\begin{aligned} K_{2010} &= 1 \text{ Cent } (1+\frac{3}{100})^{2012} = 1,03^{2012} \text{ Cent} \\ &\approx 6,73 \cdot 10^{25}\text{Cent } = 6,73 \cdot 10^{23} \text{ Euro } = 6,73 \cdot 10^{14}\text{Milliarden Euro} \end{aligned}$$

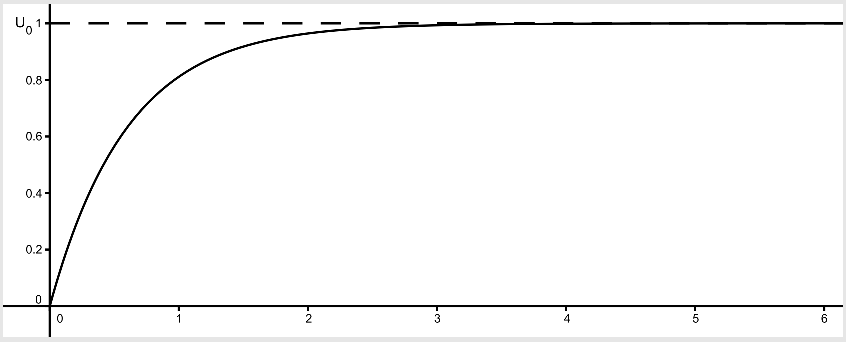
   angewachsen.

2. Aufladung eines Kondensators
   Für die Aufladung eines Kondensators mit der Kapazität C gemäß der elektrischen Schaltung



   mit einem elektrischen Widerstand R gilt die Formel

$$u_c(t) = u_0(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$



   Die Kondensatorspannung nähert sich somit asymptotisch der Ausgangsspannung.

3. Wachstumsprozess (Populationsmodell)
Es leben zur Zeit etwa $6,9 \cdot 10^9$ Menschen auf der Erde. Wir nehmen an, dass sich die Bevölkerung gemäß der exponentiellen Wachstumsformel

$$N(t) = N_0 e^{pt},\ N_0 = N(0)$$

vermehrt. Dabei ist t die Zeit, $p = 1,17\%$ der Wachstumskoeffizient und $N(t)$ die Anzahl der Menschen zur Zeit t.

Frage: Wann wird sich diese Zahl verdoppelt haben?

Die Verdopplungsforderung führt zu der Gleichung:

$$2N_0 = N_0 e^{pt} = N_0 e^{0,017t}$$

Daraus folgt:

$$2 = e^{0,017t},\ t = \frac{\ln(2)}{0,017} = 40,77$$

In ca. 41 Jahren leben dann etwa doppelt soviel, also 13,8 Milliarden Menschen auf der Erde. Man beachte, dass die Ausgangszahl N_0 in die Berechnung nicht eingeht, sich die Menschen danach alle 41 Jahre verdoppeln.

Die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktion zur Basis a heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis a

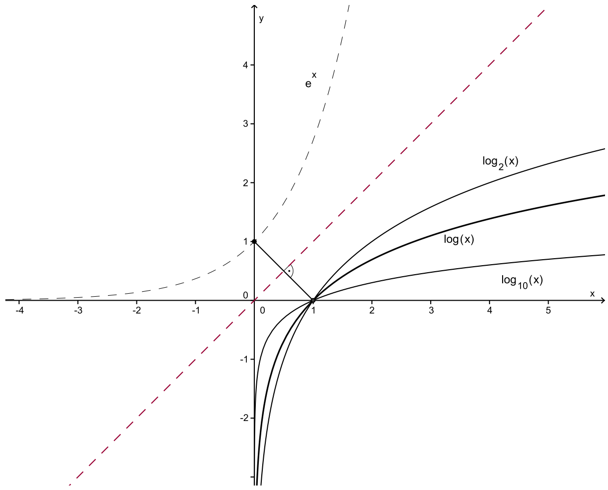
$$\log_a : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R},\quad y = f(x) = \log_a(x),\ a > 0,\ a \neq 1$$

Es gilt also

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

Am gebräuchlichsten sind die Logarithmen für Basis $a > 1$, auf die wir uns beschränken. Die Logarithmusfunktion zur Basis e heißt **natürliche Logarithmusfunktion**.

Das Schaubild der Logarithmusfunktion entsteht aus dem der Exponentialfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden. Die Abbildung zeigt einige Verläufe wichtiger Logarithmen.



Es ergeben sich einige Eigenschaften der Logarithmusfunktionen:

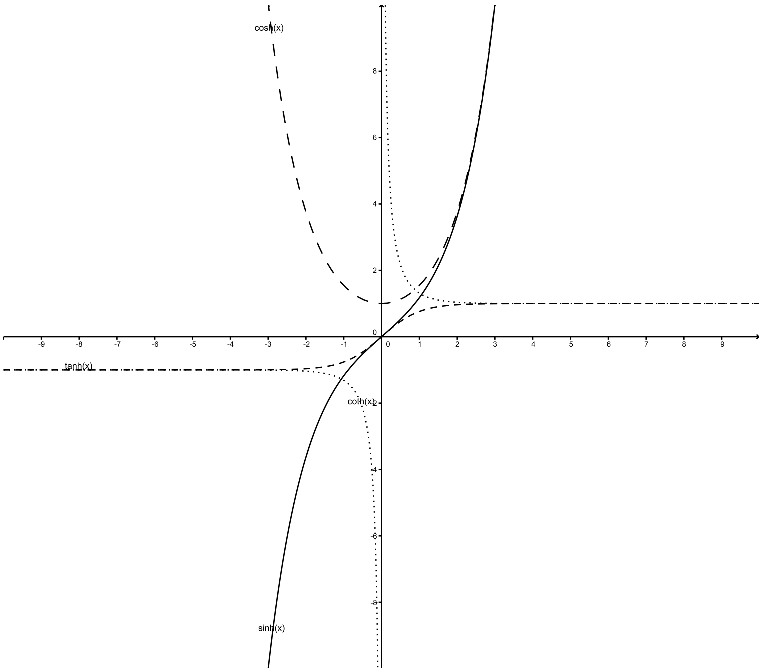
1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^{>0}$, Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
2. Gemeinsamer Punkt (1,0), $\log_a 1 = 0$, $a^0 = 1$
3. Alle Logarithmenfunktionen sind monoton steigende Rechtskurven.
4. Es gilt: $\log_a x \to \infty$ falls $x \to \infty$, $\log_a x \to -\infty$, falls $x \to 0$

Beispiel:
Man berechne alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $2^{x+3} = 3^{x+2}$

$$(x+3)\ln 2 = (x+2)\ln 3$$

$$x(\ln 2 - \ln 3) = 2\ln 3 - 3\ln 2$$

$$x = \frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln \frac{9}{8}}{\frac{2}{3}}$$



18 Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen sind Funktionen, die aus der e-Funktion mittels Grundrechenoperationen zusammengesetzt sind. Sie besitzen die Darstellungsform:

$$\begin{array}{rll} \sinh: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & y = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (ungerade)} \\ \cosh: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & y = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (gerade)} \\ \tanh: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & y = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ (ungerade)} \\ \coth: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & y = \to \mathbb{R}, \coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ (ungerade)} \end{array}$$

sinh und cosh stellen den ungerade bzw. geraden Anteil der e-Funktion dar, während sich tanh und coth als Quotient aus diesen ergeben wie bei sin und cos. Die Hyperbelfunktionen besitzen eine enge Verwandtschaft zu den trigonometrischen Funktionen, was ihre Formeln angeht. Sie besitzen jedoch keine Periode.
Folgende Formeln gelten z.B.:

a.) Es gilt die **Hyperbelformel**:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Denn: $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$

$$\frac{1}{4} \cdot (\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}) - \frac{1}{4}(\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}}) = 1$$

b.) Es gelten folgende **Additionstheoreme**:

$$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cdot \cosh x_2 + \sinh x_2 \cdot \cosh x_1$$

$$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cdot \cosh x_2 + \sinh x_1 \cdot \sinh x_2$$

Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen heißen **Area-Funktionen**. Zum Teil sind die Wertebereiche der Hyperbelfunktionen für die Umkehrung auf einem umkehrbaren Bereich zu beschränken.

$$\begin{array}{rcl}
\text{arsinh}: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & y = \text{arsinh}\,(x) \\
\text{arcosh}: & \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}, & y = \text{arcosh}\,(x) \\
\text{artanh}: & [-1,1] \to \mathbb{R}, & y = \text{artanh}\,(x) \\
\text{arcoth}: & \mathbb{R}[-1,1] \to \mathbb{R}\backslash\{0\}, & y = \text{arcoth}\,(x)
\end{array}$$

So wie die Hyperbelfunktionen Kombinationen der e-Funktion sind, lassen sich die Areafunktionen über die Logarithumsfunktion darstellen. Dies soll am Beispiel von arsinh vorgeführt werden.
Seien dazu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x = \text{arsinh}\,(y)$ bzw. $y = \sinh(x)$, $y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Dann ist

$2y = \mathrm{e}^x - e^{-x}$, d.h. $2y\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} - 1$

Setze $z = \mathrm{e}^x$. Dann folgt $2yz = z^2 - 1$, bzw. $0 = z^2 - 2yz - 1$

Auflösung nach z ergibt: $z = y \pm \sqrt{y^2+1} = y + \sqrt{y^2+1}$ wegen $z > 0$

Resubstitution: $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$, also: $x = \text{arsinh}\,(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Vertauschen von x und y ergibt dann die Formel:

$$\text{arsinh}\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

In analoger Weise zeigt man:

$$\text{arcosh}\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

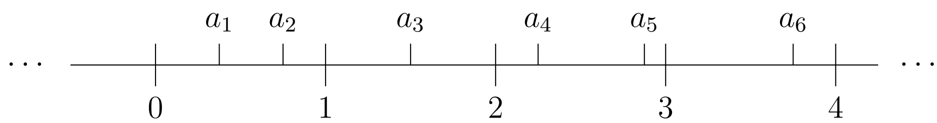
19 Folgen und Grenzwerte

19.1 Begriff der Folge

Man erhält eine sogenannte **Folge** reeller Zahlen, wenn man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet.
Man schreibt für eine solche Folge

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Die Elemente a_i der folge heißen auch **Folgenglieder**. Eine Folge reeller Zahlen lässt sich als Punktfolge auf dem Zahlenstrahl veranschaulichen



Beispiele:

1. $a_n = n^2$ bzw. $(a_n) = 1,\ 4,\ 9\ \ldots$
2. $a_n = \dfrac{1}{n}$ bzw. $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
3. $(a_n) = 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.
   Diese Folge lässt sich gut rekursiv beschreiben:
   $a_1 = 1, a_2 = 2$ und $a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ \ n \geq 3$ (Fibonacci-Folge)
4. $(a_n) = 3$ bzw. $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 3$
5. $(a_n) = 1, 4, 7, 10, \ldots$ bzw. $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3$ ist eine archimedische Folge.

   Benachbarte Folgenglieder archimedischer Folgen besitzen einen konstanten Abstand, d.h. $a_n - a_{n-1}$ =konstant, in dem Fall 3.
6. $(a_n) = 2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ bzw. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ist eine geometrische Folge.

   Der Quotient benachbarter Folgenglieder geometrischer Folgen ist konstant, d.h. $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ =konstant, in dem Fall 3.

Einige wichtige Eigenschaften, die Folgen besitzen können, sind:

1. **monoton wachsend** bzw. **streng monoton wachsend**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ bestehen die Ungleichungen

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n < a_{n+1} \tag{10}$$

2. **monoton fallend** bzw. **streng monoton fallend**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ bestehen die Ungleichungen

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n > a_{n+1} \tag{11}$$

3. **Beschränktheit:** Eine Folge (a_n) heißt

   (a) **nach oben beschränkt**, falls es eine Schranke $K \in \mathbb{R}$ mit

   $$a_n \leq K \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

   gibt,

   (b) **nach unten beschränkt**, falls es eine Schranke $L \in \mathbb{R}$ mit

   $$a_n \geq L \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

   gibt,

   (c) **beschränkt**, bzw. genauer: **nach oben und unten beschränkt**, falls es Schranken $K, L \in \mathbb{R}$ mit

   $$L \leq a_n \leq K \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{14}$$

   gibt,

4. **alternierend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lccccc} & a_n & < & 0 & < & a_{n+1} \\ \text{oder} & a_n & > & 0 & > & a_{n+1} \end{array} \tag{15}$$

gilt; in diesem Fall erfolgt beim Übergang von einem Folgenglied a_n zum Nachfolger a_{n+1} stets ein Vorzeichenwechsel.

Beispiele:

(1)	$a_n = n$	$: \ 1, 2, 3, \ldots$	streng monoton wachsend, nach unten beschränkt
(2)	$a_n = \frac{1}{n}$	$: \ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$	streng monoton fallend, beschränkt
(3)	$a_n = (-1)^{n+1}$	$: \ 1, -1, +1, \ldots$	alternierend
(4)	$a_n = 3$	$: \ 3, 3, 3, \ldots$	konstant
(5)	$a_n = \frac{n}{n+1}$	$: \ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	streng monoton wachsend, beschränkt

Bei diesen Folgen kommen einige Besonderheiten vor:

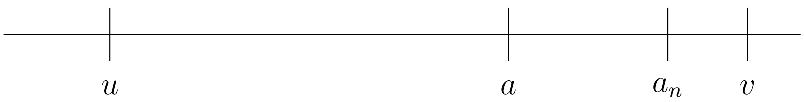
$$\begin{array}{lcl} (2),\ (4)\ \text{und}\ (5) & : & \text{Diese Folgen sind konstant oder nähern sich} \\ & & \text{einem festen Wert beliebig nahe an.} \\ (2)\ :\ a_n = \dfrac{1}{n} & : & a_n \longrightarrow 0 \quad \text{mit wachsendem } n \\ (5)\ :\ a_n = \dfrac{n}{n+1} & : & a_n \longrightarrow 1 \quad \text{mit wachsendem } n \end{array} \tag{16}$$

19.2 Begriff der Konvergenz und des Grenzwertes

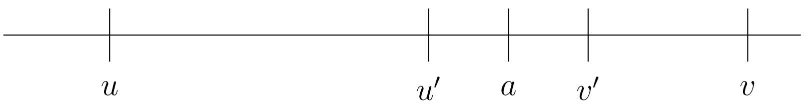
Die Beispiele aus (16) führen auf einen der wichtigsten Begriffe der Analysis: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Folge (a_n), wenn

- die Folge beschränkt ist,
- sich die Folge dem Wert a beliebig dicht annähert und
- sich sonst keinem anderen Wert $\tilde{a} \in \mathbb{R}\,(\tilde{a} \neq a)$ beliebig stark annähert.

Dieses lässt sich anschaulich gut formulieren; man betrachtet dazu ein offenes Intervall $I = (u, v) \subset \mathbb{R}$ mit $a \in (u, v)$



Wie klein das offene Intervall I mit $a \in I$ auch gewählt wird, nur endlich viele Folgenglieder a_n können außerhalb des Intervalls liegen. Innerhalb von I liegen dann unendlich viele a_n. Geht man zu einem kleineren Intervall (u', v') über, so dass auch noch $a \in (u', v')$ ist,



so kann zwar die Anzahl der Folgenglieder a_n mit $a_n \notin (u', v')$ zunehmen, sie bleibt aber endlich. Die unendliche Mehrheit der Folgenglieder liegt nach wie vor in dem Intervall (u', v') .

Gleichbedeutend damit, dass a der Grenzwert der Folge (a_n) ist, ist die Tatsache, dass der Abstand zwischen dem Grenzwert a und den Folgegliedern (a_n)

$$|a_n - a| \tag{17}$$

mit wachsendem n beliebig klein wird.

Beispiel: Die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$ besitzt den Grenzwert $a = 1$, denn man berechnet

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Für den Grenzwert a einer Folge (a_n) ist die folgende **Schreibweise** üblich:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{Limes } a_n \text{ für } n \text{ gegen Unendlich} \tag{18}$$

Man sagt:

"Die Folge **konvergiert**." oder "Die Folge ist **konvergent**." bzw.
"Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert a."

Eine konvergente Folge (a_n) mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nennt man **Nullfolge**.

Besitzt die Folge (a_n) *keinen* Grenzwert, so sagt man

"Die Folge **divergiert**." oder "Die Folge ist **divergent**."

Ist eine divergent Folge unbeschränkt, d.h. geht sie nach $+\infty$ oder $-\infty$, so heißt die Folge **bestimmt divergent** und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

Es folgen einige einfache Beipsielfolgen, deren Grenzwerte unmittelbar einleuchtend sind. Aus diesen elementaren Folgen lassen sich später durch Rechengesetze, auch Grenzwerte weiterer, komplizierterer Folgen ermitteln.

Beispiele:

1. Für die konstante Folge (a_n) mit $a_n = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c$
2. Für die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

4. Der Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = 1 - (-1)^n$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - (-1)^n)$ existiert nicht, d.h. die Folge ist (unbestimmt) divergent.

5. Für die Folge (a_n) mit $a_n = n^2 + 3$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 3) = \infty$ (bestimmt divergent)

6. Für $\alpha > 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

7. Für $q \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{unbestimmt divergent}, & q \leq -1 \end{cases}$

19.3 Rechenregeln für Grenzwerte

Gegeben seien die beiden konvergenten Folgen (a_n) und (b_n) mit dem Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \tag{19}$$

Zunächst erhält man hieraus neue Folgen, indem man diese Folgen gliedweise mit den üblichen Rechenoperationen verknüpft; man erhält damit die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolge:

$$(a_n \pm b_n), \quad (a_n \cdot b_n), \quad (a_n / b_n) \tag{20}$$

Bei der Quotientenfolge läßt man diejenigen Folgenglieder weg, bei denen der Nenner b_n Null ist. Aufgrund von (19) gilt für die Grenzwerte der Folgen (20):

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = \frac{a}{b} \qquad (\text{falls } b \neq 0) \tag{24}$$

Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so ergibt sich zusätzlich, indem man speziell für (b_n) die konstante Folge $b_n = c$ nimmt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm c) = a \pm c \tag{25}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot c) = a \cdot c \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n / c) = \frac{a}{c} \qquad \text{(falls } c \neq 0\text{)} \tag{27}$$

Beispiele:

$$a_n = \frac{2 \cdot n^2 + 1}{n^2 + n + 3}$$

Durch den Summanden mit dem höchsten Wachstum kürzen! Am stärksten wächst hier n^2:

$$= \frac{\overbrace{2 + 1/n^2}^{\to 2+0=2}}{\underbrace{1 + 1/n + 3/n^2}_{\to 1+0+0=1}} \longrightarrow \frac{2}{1} = 2$$

Hier wachsen Zähler und Nenner gleich schnell.

$$a_n = \frac{5 \cdot n^3 + n}{1 + n^2}$$

$$= \frac{\overbrace{5 \cdot n + 1/n}^{\to\infty}}{\underbrace{1/n^2 + 1}_{\to 0+1=1}} \longrightarrow \infty$$

Hier wächst der Zähler schneller als der Nenner.

$$a_n = \frac{n^2 + 2^n}{1 + 3^n}$$

Auch hier durch den Summanden mit dem höchsten Wachstum kürzen:

$$= \frac{\overbrace{n^2 \cdot 3^{-n} + (2/3)^n}^{\to 0+0=0}}{\underbrace{3^{-n} + 1}_{\to 0+1=1}} \longrightarrow 0$$

Hier wächst der Nenner schneller als der Zähler.

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Typ $\infty - \infty$. Vor Anwendung der Regeln ist mit binomischer Formel umzuformen.

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}_{\to\infty+\infty=\infty}} \longrightarrow 0$$

Hier geht der Nenner dann gegen ∞, der Zähler ist konstant 1.

Die Anwendung dieser Regeln greift nicht immer, insbesondere nicht bei rekursiv definierten Folgen. Wir betrachten folgende rekursive Folge:

$$a_1 = 2 \text{ und } a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \text{ für } n > 1$$

Falls (!) die Folge einen Grenzwert a besitzt, kann man aufgrund der Grenzwertregeln folgern:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

Diese letztlich quadratische Gleichung $\frac{1}{2}a^2 - 1 = 0$ kann nach a aufgelöst werden zu $a = \pm\sqrt{2}$. Da nun alle a_n positiv sind, kann der Grenzwert a nicht negativ sein. Falls die Folge konvergent ist, ist ihr Grenzwert $\sqrt{2}$.

Die Existenz des Grenzwertes selber kann aus Eigenschaften der Folge nachgewiesen werden. Die Folge a_n ist nämlich monoton fallend und nach unten beschränkt. Für derartige Folgen gilt der **Satz von Bolzano/Weiterstraß**. Dieser Satz besagt:

Eine nach unten beschränkte, monoton fallende Folge besitzt einen Grenzwert.

und ebenso:

Eine nach oben beschränkte, monoton steigende Folge besitzt einen Grenzwert.

Hinweis: Der Beweis nutzt die Existenz eines Supremums (kleinste obere Schranke) bzw. Infimums (größte untere Schranke) einer nach oben bzw. nach unten beschränkten nichtleeren Menge. Es lässt sich leicht zeigen, dass das Supremum bzw. das Infimum dem Grenzwert entspricht.

19.4 Die Zahl e

Eine weitere sehr interessante Folge ist durch

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegeben. Wir zeigen mit dem Satz von Bolzano/Weierstraß, dass diese Folge einen Grenzwert besitzt. Der Grenzwert ist die **Eulersche Zahl e**. Mit dem Einsetzen erster Werte für n ermittelt man Näherungswerte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad e \quad \approx \quad 2.718\ldots$$

Diese Folge besitzt eine interessante Deutung: Angenommen, ein Kapital von einem Euro wird mit einen jährlichen Zinssatz von 100% verzinst[12]. Der Euro wird nun unterjährig

[12] Ein solcher Zinssatz ist keineswegs ungewöhnlich; in Ländern mit sehr hoher Geldentwertung kommen Zinssätze dieser Größenordnung in der Tat vor.

für $\frac{1}{n}$-tel Jahr n mal angelegt. Nach einem Jahr besitzt man dann $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Euro. Lässt man nun n gegen unendlich gehen, um möglichst viele Zinseszinsen mitzunehmen, so hat man zumindest theoretisch ein Kapital von e Euro erwirtschaftet. Man erkennt daran, dass dieser Grenzwert bei Aufgabenstellungen der Vermehrung und des Wachstums von Bedeutung ist.

Für den Nachweis der Konvergenz zeigt man

1. a_n ist monoton steigend.

   Mit der Bernoullischen Ungleichung $(1+x)^n > 1+nx$ für $x > -1$ gilt mit $x = -1/n^2$
   $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
   $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$
   $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, d.h. $a_n > a_{n-1}$

2. a_n ist nach oben beschränkt.

$$\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+1+\frac{n(n-1)}{2n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3n^3}+\ldots++\frac{n!}{n!n^n} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \text{da: } n! > 2^n \\
&\geq 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}, \quad \text{(geometrische Summe)} \\
&= 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3
\end{aligned}$$

   Obere Schranke ist somit 3.

Mit dem Satz von Bolzano/Weierstraß ist die Folge also konvergent.

20 Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit

20.1 Begriff des Grenzwertes einer Funktion und Beispiele

Bekannt ist der Grenzwert einer Folge, z.B.:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2}\,, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$

$$a_n = (1+\tfrac{1}{n})^n\,, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n = e$$

Dieser Grenzwertbegriff soll auf Funktionen übertragen werden.

Beispiel: $y = f(x) = x^2$

Gegeben sein die Folge $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}\,, \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2.$

Dann gilt für die Funktionswerte:

$$f(x_n) = x_n^2 = (2 - \frac{1}{n})^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}, \text{ also: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 4$$

Für den Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle, in dem Fall $x_0 = 2$ ist es bedeutsam, dass für bf alle Folgen, die auf der x-Achse gegen x_0 konvergieren, die entsprechenden Folgen der Funktionswerte auch einen Grenzwert besitzen und zwar immer den selben. Man schreibt dann bezogen auf das Beispiel:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

Im Allgemeinen definiert man:

Sei f in einer Umgebung von x_0 definiert, nicht unbedingt bei x_0 selber.
Die reelle Zahl g heißt **Grenzwert der Funktion** f **an der Stelle** x_0, falls für jede im Definitionsbereich liegende Folge x_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Man schreibt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Gilt obiges nur für jede von links her gegen x_0 strebende Folge, so schreibt man

$$\lim_{x\to x_0, x\leq x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g^-$$

und g^- heißt **linksseitiger Grenzwert**. Gilt obiges andereseits nur für jede von rechts her gegen x_0 strebende Folge, so formuliert man analog

$$\lim_{x\to x_0, x\geq x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g^+$$

und g^+ heißt **rechtsseitiger Grenzwert**. Man kann zeigen, dass f genau dann einen Grenzwert g bei x_0 besitzt, falls g^+ und g^- existieren und $g^+ = g^-$ ist.

Analog zum Grenzwert bei x_0 lassen sich auch Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ betrachten. Man schreibt in dem Fall dann $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = g$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x_n) = g$

Die schon bekannten Grenzwertregeln für Folgengrenzwerte lassen sich auf diese Funktionsgrenzwerte übertragen und gelten in ähnlicher Weise, so dass entsprechende Umformungen mit Grenzwerten erlaubt sind.

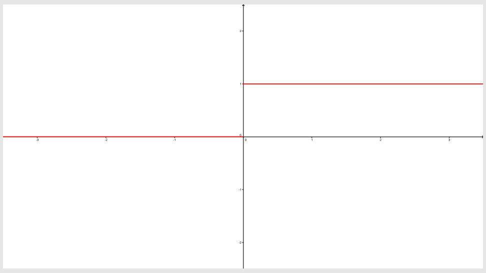
Beispiele :

1) $y = f(x) = x^2, \quad x_0 = 2$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 3}(2 - \dfrac{1}{x}) = \dfrac{5}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2x^2-7}{x^3-1}\right)^2 = \left(\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-7)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-7}{x^3-1}\right)^2 = \dfrac{1}{49}$



4) $y = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$

$x_0 = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

$g^- = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 \quad$ (existiert)

$g^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \quad$ (existiert)

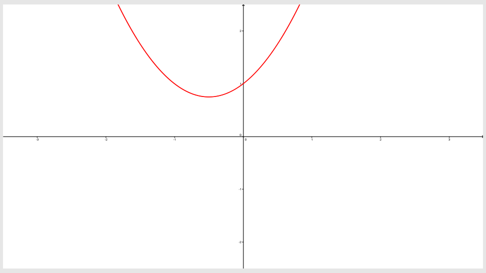
$g^- \neq g^+$, daher existiert der Grenzwert der Funktion f bei 0 nicht.
Ein solches Verhältnis bei x_0 nennt man einen **Sprung**.

5) $y = f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}, \qquad x_0 = 1 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g^- = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x^2 + x + 1 = 3$$

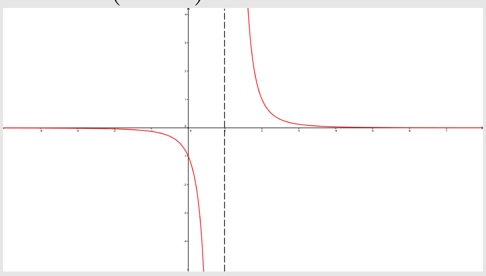
$$g^+ = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x^2 + x + 1 = 3$$

g^-, g^+ existieren und $g^+ = g^-$



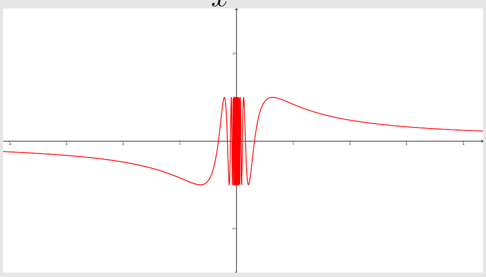
In $x_0 = 1$ ist die Funktion jedoch nicht definiert. Über links- und rechtsseitigen Grenzwertzeigt man, dass der Grenzwert der Funktion f bei 1 existiert. Ein solches Verhalten einer Funktion f nennt man eine **behebbare Definitionslücke** bei x_0. Die Funktion f lässt sich in x_0 mit dem Wert $g = g^+ = g^- = 3$ sinnvoll erweitern.

6) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3} \qquad x_0 = 1 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



$g^- = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^3} = -\infty$ und $g^+ = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^3} = +\infty$ existieren nicht.
Somit existiert g auch nicht. Ein solches Verhalten des Grenzwertes entspricht einer **Polstelle** bei x_0.

7) $y = f(x) = \sin \dfrac{1}{x} \qquad x_0 = 0 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht, da je nach Nullfolge jeder Grenzwert zwischen -1 und 1 herauskommt. So ist z.B.

$\lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(n\pi) = 0$, wohingegen

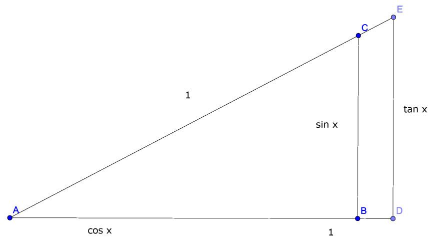
$\lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{1}{\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

g^-, g^+ und g existieren bei $x_0 = 0$ nicht und sind auch nicht $\pm\infty$. Man spricht von **unbestimmter Divergenz**.

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x \quad$ (existiert nicht)

Zwei wichtige Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} =?$



Man entnehme der Zeichnung:

$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$, also $\sin x \leqslant x \leqslant \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

da $\sin(x) > 0$, gilt: $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$

$1 \geqslant \dfrac{\sin x}{x} \geqslant \cos x$. Nun bildet man den rechtsseitigen Grenzwert $x \to 0^+$:

$1 \geqslant \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \geqslant 1$; also $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Analog findet man für den linksseitigen Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Somit gilt insgesamt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
Wir nutzen dazu die Ungleichungen (s.o.): $e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$
Für $x > 0$ gilt dann zunächst: $\dfrac{e^x - 1}{x} \geq 1$.
Setzen wir in die Ungleichung an Stelle von x nun $-x$ ein, so gilt:$e^{-x} \geq -x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Wieder mit $0 < x < 1$ findet man: $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$, d.h. $e^x - 1 \leq \dfrac{x}{1-x}$,

also $\dfrac{e^x-1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$

Insgesamt gilt dann die Doppelgleichung: $1 \leq \dfrac{e^x-1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$

Nun wendet man den Grenzwert $x \to 0^+$ auf diese Doppelungleichung an und erhält:

$1 \leq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} \leq 1$, also $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Analoges kann man für den linksseitigen Grenzwert $x \to 0^-$ zeigen. Also gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

20.2 Begriff der Stetigkeit einer Funktion

Beim Begriff des Grenzwertes einer Funktion f muss die Funktion am zu untersuchende Punkt x_0 nicht unbedingt definiert sein. Ist sie dort auch definiert mit dem Funktionswert $f(x_0)$ und gilt, dass der Grenzwert der Funktion bei x_0 dem Funktionswert entspricht, dann nennen wir f stetig in x_0. Dies drückt aus, dass der Funktionswert zu seiner Umgebung passt. Genauer formuliert bedeutet dies:

Die Funktion f heißt **stetig in** x_0, falls gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ist die Funktion f in jedem Punkt des Definitionsbereiches stetig, so nennt man f selbst **stetig**. Anschaulich ist f stetig, falls jeder Funktionswert überall zu seiner Umgebung "passt" und z.B. keine Sprünge aufweist. Der Funktionsverlauf einer stetigen Funktion ist dadurch in gewisser Weise kalkulierbar. Kleine Änderungen bei den Argumenten verursachen dann auch nur kleine Änderungen am Funktionswert.

Nun stellt sich die Frage, welche der uns bekannten Funktionen stetig sind. Dazu lässt sich zeigen:

1.) Die uns bekannten Funktionen wie Polynome, gebrochen rationale Funktionen, Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmen, ... inklusive ihrer Umkehrfunktionen sind (in ihrem Definitionsbereich) stetig.

2.) Verknüpfungen (dazu zählen Addition, Multiplikation, Division, Verkettung, ...) stetiger Funktionen, ergeben wieder stetige Funktionen.

Hinweise

- Polstellen sind im eigentlichen Sinn keine Unstetigkeitsstellen, da die Funktion an den Polstellen selber nicht definiert ist. So ist z.B. die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig.
- Nicht stetig ist z.B. die uns schon bekannte Gaußfunktion. Sie ist nicht stetig in allen Argumenten $x \in \mathbb{Z}$; dort weist sie Sprünge auf.

20.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Für stetige Funktionen gelten wichtige Sätze, insbesondere in Verbindung mit abgeschlossenen, beschränkten Intervallen als Definitionsbereich. Einige dieser Sätze sollen kurz skizziert und erläutert werden.

1.) **Nullstellensatz**:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ auf dem abgeschlossenem Intervall [a,b] stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$

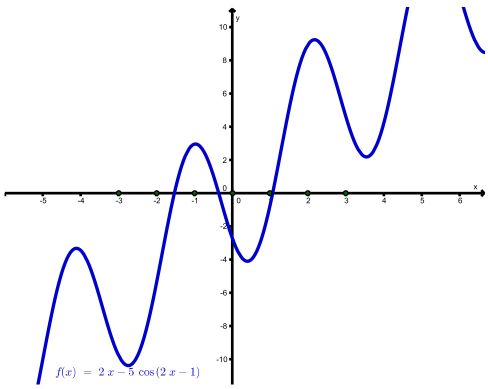
Die Voraussetzung $f(a) \cdot f(b) < 0$ garantiert dabei, dass die Funktion zwischen a und b das Vorzeichen ändert, damit liegt die Zahl 0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Da die Funktion keine Sprünge macht, wird die Zahl 0 bei irgendeinem x-Wert als Funktionswert angenommen.

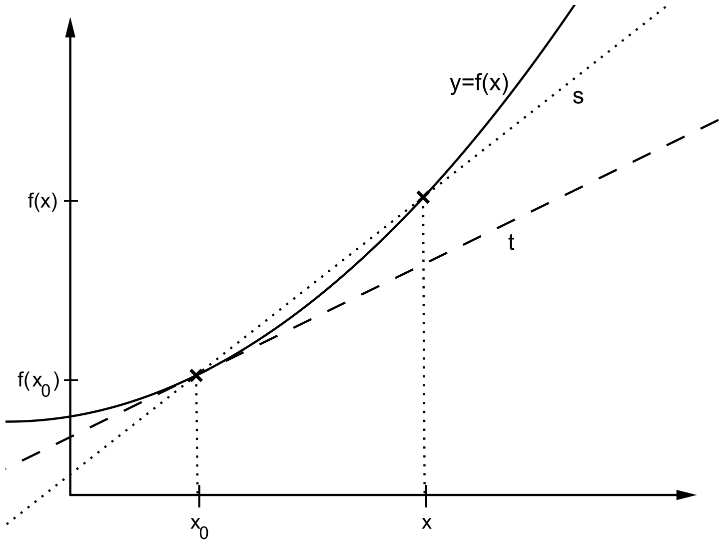
- **Beispiel:** Eine typische Anwendung dieses Satzes ist es, Nullstellen von Funktionen aufzuspüren. Sei z.B. $f(x) = 2x - 5\cos(2x - 1)$. Man zeige: Im Intervall $[-3, 3]$ liegen mindestens drei Nullstellen.

- Zum Nachweis berechnet man einige Funktionswerte:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9.77	-5.42	2.95	-2.7	-0.70	8.95	4.58

Man erkennt nun am Vorzeichenwechsel, dass zumindest in den Intervallen [-2,-1],[-1,0] und [1,2] jeweils mindestens eine Nullstelle vorhanden ist, was der Kurvenverlauf bestätigt.





2.) **Zwischenwertsatz**:
Ist die Funktion f auf dem Intervall [a,b] stetig, dann existiert zu jedem $\lambda \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \lambda$.

- Der Zwischenwertsatz ist eine Verallgemeinerung des Nullstellensatzes. Er besagt, dass jede reelle Zahl und nicht nur die 0, die zwischen zwei Funktionswerten liegt, auch als Funktionswert angenommen wird. Er folgt aus dem Nullstellensatz, indem dieser bei einem gewählten $\lambda \in [f(a), f(b)]$ auf die Funktion $g(x) = f(x) - \lambda$ angewendet wird. Es gibt dann ein ξ mit $g(\xi) = 0$, was heißt, dass $f(\xi) = \lambda$.

3.) **Existenz globaler Extrema**:
Sei die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig. Dann existieren die Zahlen x_m und x_M in $[a, b]$, sodass gilt: $f(x) \leq f(x_M)$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x) \geq f(x_m)$ für alle $x \in [a, b]$.

- Der Satz besagt, dass auf einem abgeschlossenen und beschränktem Intervall definierte, stetige Funktionen ein Minimum und ein Maximum annehmen. Minimum und Maximum könen dabei im Innern als auch auf dem Rand, also bei $x = a$ oder $x = b$, auftreten. Im Innern stellen sie auch lokale Extremwerte dar, deren Bestimmung Bestimmung im Rahmen der Differentialrechung weiter thematisiert wird.

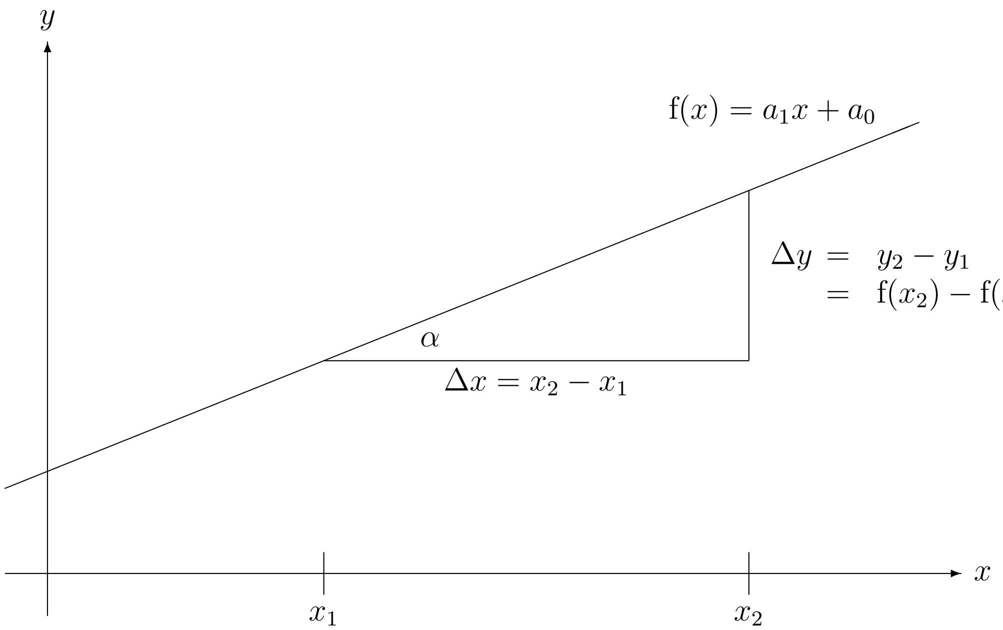
- Der Beweis, der hier übersprungen werden soll, basiert darauf, dass gezeigt wird, dass der Wertebereich $f([a, b])$ seinerseits abgeschlossen und beschränkt ist. Dann existieren nach dem Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen Minimum und Maximum der Menge.

4.) **Fixpunktsatz**:
Ist f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und gilt $f(x) \in [a, b]$ für alle $x \in [a, b]$, dann existiert ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = x^*$

- Dieser Satz besagt, dass die Funktion f unter den angegebenen Voraussetzungen einen Fixpunkt besitzt, also einen Punkt, der auf sich selber abgebildet wird. Der Nachweis gelingt wieder mithilfe des Nullstellensatzes, angewendet auf die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

21 Steigung einer linearen Funktion

Wie stark nehmen die Werte einer Funktion zu, wenn man sich auf der x-Achse nach rechts bewegt? Die Stärke dieser Zunahme ist die Steigung der Funktion. Offenbar besitzt eine lineare Funktion $\mathrm{f}(x) = a_1 \cdot x + a_0$ eine konstante Steigung, denn ihr Schaubild ist eine Gerade, und diese Gerade schneidet jede waagerechte Gerade mit demselben Steigungswinkel α.



Als sinnvoller Wert für die Steigung der linearen Funktion hat sich das Verhältnis zwischen einem Zuwachs von Funktionswerten (Δy) und dem Zuwachs der entsprechenden x-Werte (Δx) ergeben. Berechnet man so den Steigungswert, so liefert dieses:

$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha)$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung bezeichnet man als **Differenzenquotienten**. Wie man anhand des sogenannten Steigungsdreiecks in der Zeichnung erkennt, handelt es sich bei dem Wert Steigung gerade um den **Tangens des Steigungswinkels** α.

Einsetzen der Gleichung der linearen Funktion in den Differenzenquotienten liefert weiter

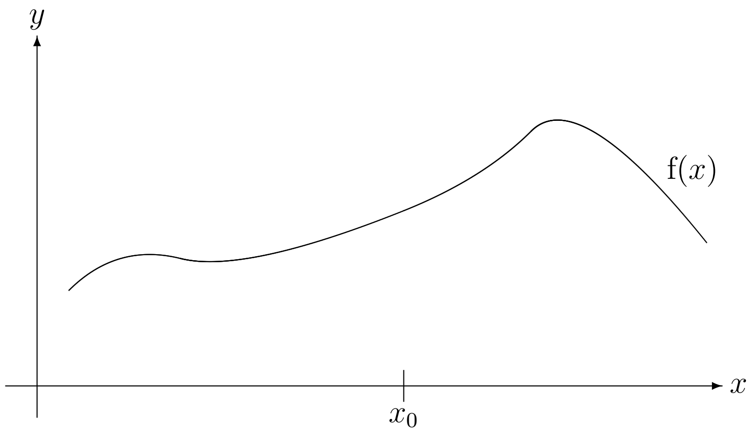
$$\text{Steigung} = \tan(\alpha) = \frac{(a_1x_2 + a_0) - (a_1x_1 + a_0)}{x_2 - x_1} = \frac{a_1x_2 - a_1x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a_1$$

Der Koeffizient a_1 ist somit der Wert der konstanten Steigung der linearen Funktion $\mathrm{f}(x) = a_1 x + a_0$.

22 Grundbegriffe der Differentialrechnung

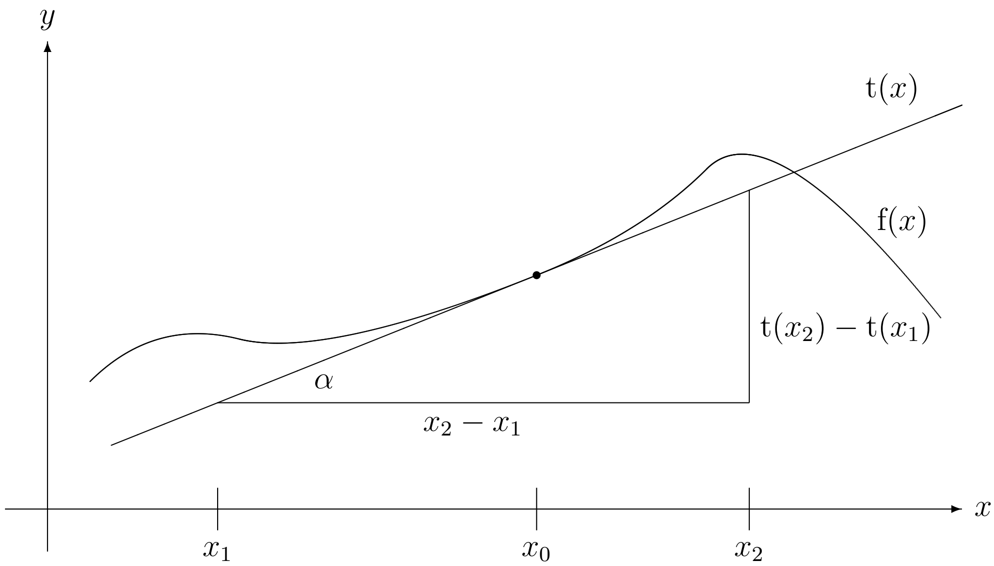
22.1 Einführung

Wie verhält es sich mit der Steigung bei einer nichtlinearen Funktion?

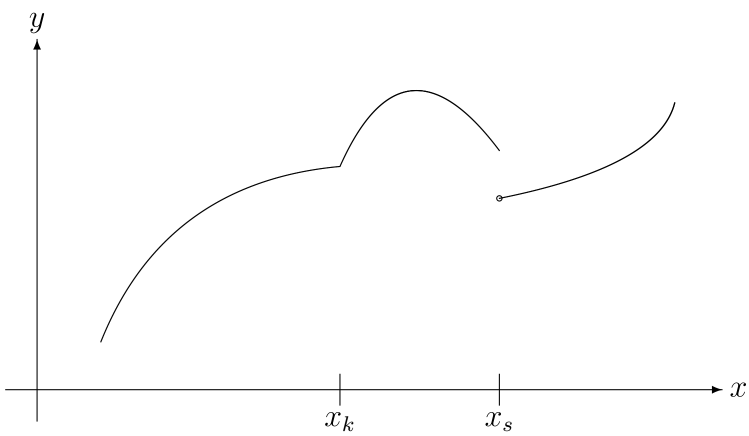


Angenommen, auch einer solchen Funktion könnte man einen sinnvollen Steigungsbegriff zuordnen, so wären die Steigungswerte sicherlich nicht konstant; bei jedem x-Werte hätte die Funktion in der Regel einen anderen Steigungswert.

Wie könnte man einer solchen Funktion für einen Punkt x_0 einen Steigungswert zuordnen? Man setzt dazu voraus, daß man an die Funktion $\mathrm{f}(x)$ im Punkte $(x_0, \mathrm{f}(x_0))$ die **Tangente** anlegen kann. Hierbei handelt es sich um eine Gerade, die sich bei x_0 an die Funktion anschmiegt (d.h. die Funktionskurve berührt). Diese Gerade ist wiederum durch eine lineare Funktion gegeben, deren Steigung wie oben berechnet werden kann. **Diese Tangentensteigung nimmt man nun auch als Steigungswert der Funktion an der Stelle** x_0.



Es kann durchaus vorkommen, dass man einer Funktion bei einigen x-Werten keinen Steigungswert zuordnen kann. Dieses kann etwa auftreten, wenn die Funktion einen **Knick** oder einen **Sprung** besitzt:

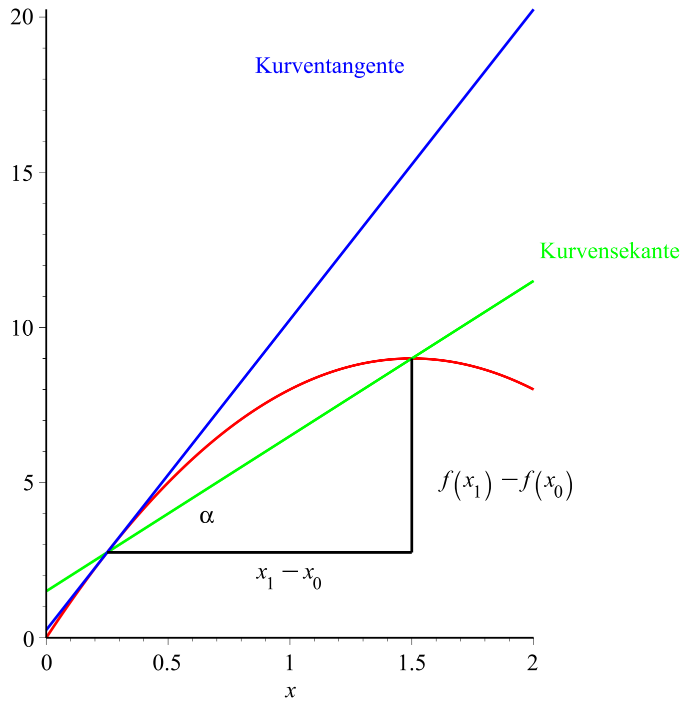


An der Stelle x_k genauer im Kurvenpunkt $(x_k, f(x_k) \in Graph(f)$ hat Graph(f) einen „Knick“ und an der Stelle x_s genauer im Kurvenpunkt $(x_s, f(x_s) \in Graph(f)$ hat Graph(f) einen „Sprung“, dort lassen sich keine Tangenten an Graph(f)anlegen.

Läßt sich bei einem Punkt $(x, f(x)) \in Graph(f)$ eine Tangente anlegen, so soll also die Steigung der Tangente die Steigung der Funktion in diesem Punkt sein. Die Funktion heißt dann „in x differenzierbar“.

Es bleibt die Frage, wie sich die Steigung der Tangente t in x_0 an f ermitteln lässt.

22.2 Kurvensekante, Kurventangente, Differenzierbarkeit und 1. Ableitung



Eine Näherung für die Tangentensteigung ist die Steigung der Sekante s durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und einem Punkt $(x_1, f(x_1))$:

$$\text{Die Steigung der Sekante beträgt: } \tan(\alpha) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Die **Gleichung der Kurvensekante** (Geradengleichung in Punkt-Steigungsform) ist:

$s(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \cdot (x - x_0)$

Je näher x_1 bei x_0 liegt, desto genauer stimmt die Steigung der Sekante mit der gesuchten Steigung der Tangente überein. Dieser Näherungsprozess wird mit Hilfe des Grenzwertbegriffs bei Funktionen ($\lim_{x_1 \to x_0} ...$) präzisiert.

Im Falle der Existenz einer (nicht senkrechten) Tangente kann die Steigung damit als Grenzwert berechnet werden:

$$\text{Steigung der Tangente: } \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Man sagt:

<u>**Definition**</u>:
Die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in** $x_0 \in \mathbb{D}$, falls der Grenzwert

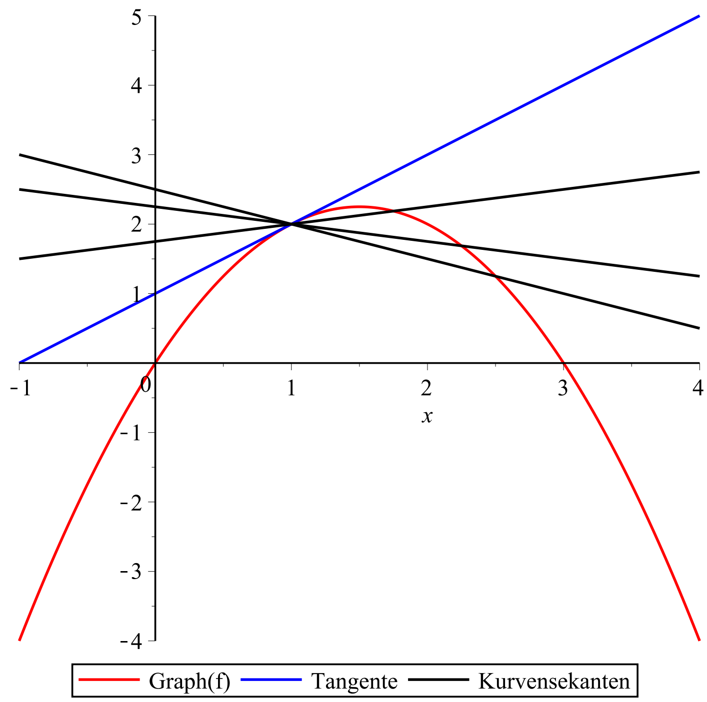
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt **(1.)Ableitung** von f an der Stelle x_0.
Dann ist $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ die Steigung der Tangente an die Funktionskurve Graph(f) im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Die **Gleichung der Kurventangente** (Geradengleichung in Punkt-Steigungsform) ist:

$$t(x) = \lim_{x_1 \to x_0} s(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Das folgende Bild zeigt die Tangente an Graph(f) im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und verschiedene Kurvensekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ für $x_1 \to x_0$:



Hier folgen ein paar Beispiele und die Anwendung einiger(vermutlich bereits aus dem Schulunterricht) bekannter Ableitungsregeln:

Beispiele:

a.) Ein Radfahrer fährt eine Strecke in km gemäß der Formel $s(t) = \frac{1}{4}t^4 + 1$

Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Streckenpunkten

1.) s(2) und s(1) $\rightarrow 3.75$

2.) s(2) und s(1,9) $\rightarrow 7.42$

3.) s(2) und s(1,99) $\rightarrow 7.94$

4.) und der Momentangeschwindigkeit zur Zeit t=2 $\rightarrow s'(2) = 8$

b.) $f(x) = c$ (konstante Funktion) $x_0 = 2,\ f'(2) = ?$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{c-c}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{0}{x-2} = \lim_{x\to 2} 0 = 0$$

Gleichung der Tangente in $(2, f(2)) = (2, c) = (2, c)$:
$y = t(x) = f(2) + f'(2) \cdot (x-2) = c + 0 \cdot (x-2) = c$

c.) $f(x) = 3x + 1$ (Gerade) $x_0 = 2,\ f'(2) = ?$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x + 1 - (3 \cdot 2 + 1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 3 = 3$$

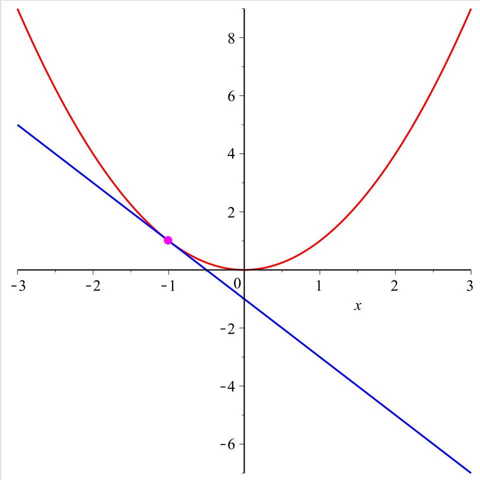
Gleichung der Tangente in $(2, f(2)) = (2, 3 \cdot 2 + 1) = (2, 7)$:
$y = t(x) = f(2) + f'(2) \cdot (x-2) = 7 + 3 \cdot (x-2) = 3x + 1$

d.) $f(x) = x^2$ (quadratische Parabel) $x_0 = -1,\ f'(-1) = ?$

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x\to -} \frac{x^2 - (-1)^2}{x+1} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1 - 1 = -2$$

Gleichung der Tangente in $(-1, f(-1)) = (-1, (-1)^2) = (-1, 1)$:
$y = t(x) = f(-1) + f'(-1) \cdot (x - (-1)) = 1 - 2 \cdot (x+1) = -2x - 1$



Bemerkung zur Schreibweise und zur Bezeichnung
Setzt man $x = x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x}$ und beachtet $x \to x_0 \iff \Delta x = (x - x_0) \to 0$ erhält man alternativ:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + (x - x_0)) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Die Ausdrücke der Form $\frac{f(x_0 + (x - x_0)) - f(x_0)}{x - x_0}$ bzw. $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nennt man **Differenzenquotienten**. Der Ausdruck $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ heißt auch **Differentialquotient**. [13]

Beispiel: Wir betrachten $f(x) = x^3$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

[13] Die Bezeichnung f' geht zurück auf Newton und Lagrange, die Bezeichnung $\frac{df}{dx}$ geht auf Leibniz zurück.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - (x_0)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3) - x_0^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2$$

22.3 Global differenzierbarer Funktionen

Ableitungswerte lassen sich auch allgemein an einer Stelle x ermitteln. Man erhält dann (falls der entsprechende Grenzwert existiert!) die (1.)Ableitungsfunktion.

Definition:
Zu einer gegebenen Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt

$$f' : D_{f'} \to \mathbb{R}, \text{ mit } y = f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

(1.)Ableitungsfunktion von f mit $D_{f'} = \{x | x \in D_f, f'(x) \text{ existiert}\}$.
Ist $D_{f'} = D_f$ nennt man $f : D_f \to \mathbb{R}$ **global differenzierbar**.

Berechnung der Ableitung einiger elementarer Funktionen aus der Definition:

a.)

$f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Also $f'(x) = 2x$ oder kurz $(x^2)' = 2x$

b.)

$f(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{(x - x_0)x_0 x} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Also $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ oder kurz $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

c.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} = a$$

damit: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ ist global differenzierbar mit
$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = a$

d.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =^{14} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x) + \cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\left[\cos(\Delta x) - 1\right] + \cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin(x) \left[\frac{\cos(\Delta x - 1)}{\Delta x} \right] + \cos(x) \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right)$$

$$= \sin(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{=0} + \cos(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{=1}$$

$$=^{15} \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

damit: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ ist global differenzierbar mit
$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x)$

[14] Additionstheorem: $\sin(x + \Delta x) = \sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x)$

[15] $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

e.)

$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ mit $f(x) = \sqrt{x}, x_0 > 0$ (also $x_0 \in (0, +\infty)$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =^{16} \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{\cancel{(x - x_0)} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

damit: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist auf $(0, +\infty)$ global differenzierbar mit
$f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x) = e^x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^x \left[\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right] \right)$$

$$= e^x \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right]}_{=1} {}^{17} = e^x$$

damit: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ ist global differenzierbar mit
$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = e^x$

---

[16] $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2, a = \sqrt{x}, b = \sqrt{b} \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) = x - x_0$

[17] $e^{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{\Delta x}{n})^n \geq 1 + \Delta x$ (Bernoullische Ungleichung)
$e^{-\Delta x} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{-\Delta x}{n})^n \geq 1 - \Delta x \Rightarrow e^{\Delta x} = \frac{1}{e^{\Delta x}} \leq \frac{1}{1 - \Delta x}$
für $\Delta x \in (-1, 1)$ also insgesamt für $\Delta x \in (-1, 1)$:
$1 + \Delta x \leq e^{\Delta x} \leq \frac{1}{1 - \Delta x}$
$\Rightarrow \Delta x \leq e^{\Delta x} - 1 \leq \frac{1}{1 - \Delta x} - 1 = \frac{1 - (1 - \Delta x)}{1 - \Delta x} = \frac{\Delta x}{1 - \Delta x}$
$\Rightarrow 1 \leq \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \leq \frac{1}{1 - \Delta x}$ falls $\Delta x > 0$ und $1 \geq \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \geq \frac{1}{1 - \Delta x}$ falls $\Delta x < 0$
$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

g.) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$
Es gilt

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{x^n \cdot (1 - \frac{x_0^n}{x^n})}{x \cdot (1 - \frac{x_0}{x})} = x^{n-1} \cdot \frac{(1 - \frac{x_0^n}{x^n})}{(1 - \frac{x_0}{x})} = x^{n-1} \cdot \frac{(1 - (\frac{x_0}{x})^n)}{(1 - (\frac{x_0}{x}))}$$

Mit $q = \frac{x_0}{x}$ erhält man

$$\frac{(1 - (\frac{x_0}{x})^n)}{(1 - (\frac{x_0}{x})} = \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

und damit

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} = {}^{18} x^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i = x^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{x_0}{x})^i$$

also $\displaystyle\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{x_0}{x})^i = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} \cdot x_0^i.$

Wir erhalten insgesamt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} \cdot x_0^i =$$

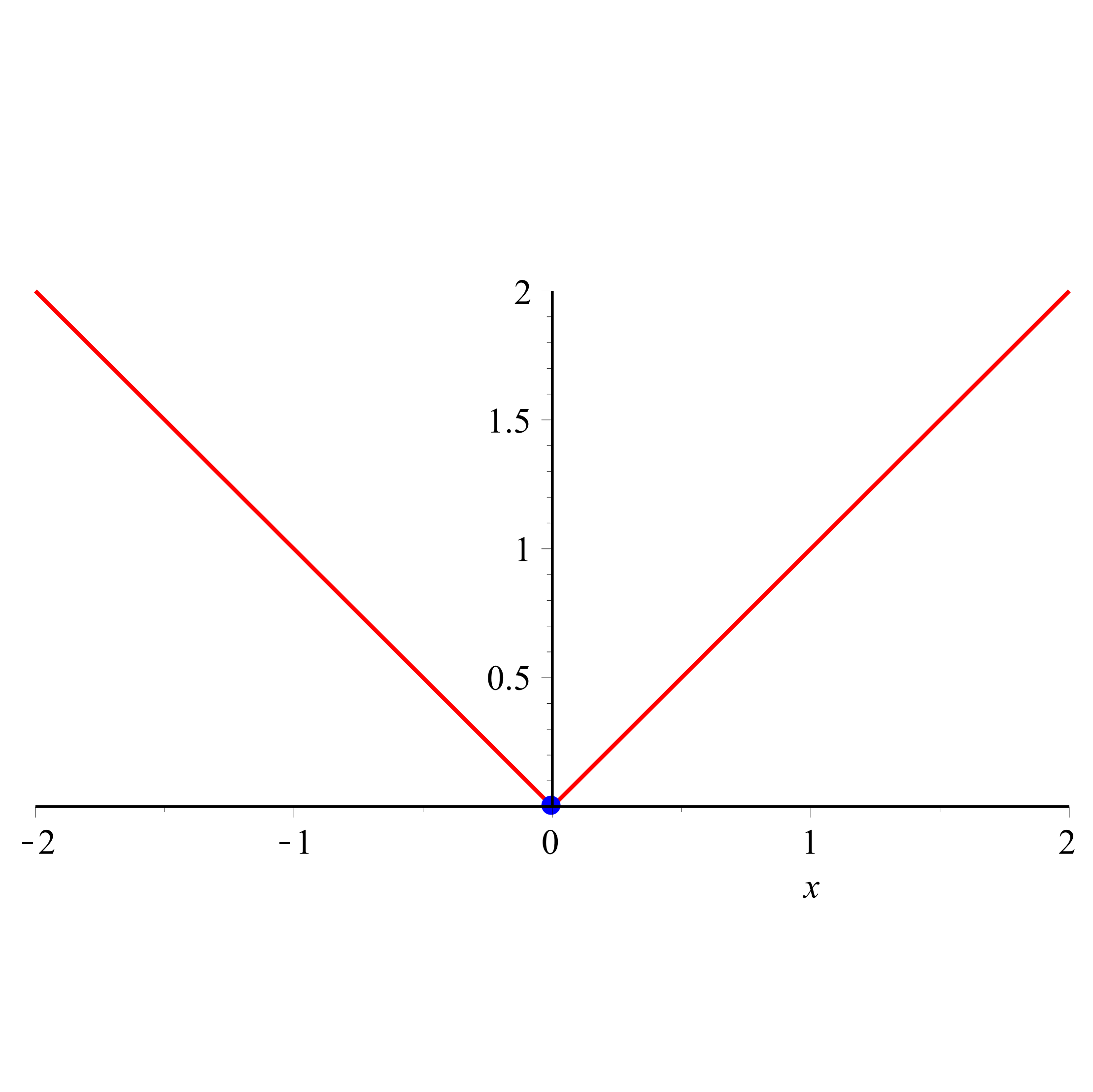
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lim_{x \to x_0} (x^{n-1-i} \cdot x_0^i) = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}$$

Wir haben also insgesamt $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

[18] $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Beispiel:

Eine Funktion, die an einer Stelle nicht differenzierbar ist:



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|\,, x_0 = 0$

$\Delta x > 0:$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 + \Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

$\Delta x < 0:$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-0 - \Delta x - 0}{\Delta x} = -1$$

$$1 \neq -1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \text{ existiert nicht.}$$

Die Ableitungen elementarer Funktionen findet man häufig in Formelsammlungen tabelliert.

Beispiel: Eine erste kleine Tabelle lautet:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Die beiden letzten Ableitungen werden wir mit der Quotientenregel [siehe 22.4] herleiten!

23 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

23.1 Stetigkeit

Satz: Gegeben sei die Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$, die in $x_0 \in D$ differenzierbar ist.
Dann gilt: $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ stetig. (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit)

Beweis:

Zu zeigen ist: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; wir betrachten dazu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f(x) - f(x_0))$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} (\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0))$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})}_{=f'(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

qed.

23.2 Linearität

Satz: Gegeben seien die beiden in $x_0 \in I = (a, b)$ differenzierbaren Funktionen

$$f, g \; : \; I \mapsto \mathbb{R}$$

Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zwei reelle Konstanten. Dann ist auch die Funktion

$$h(x) \;=\; \alpha f(x) + \beta g(x)$$

in x_0 differenzierbar, und für die Ableitung von h gilt:

$$h'(x_0) \;=\; \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Insbesondere gilt:

a) Faktorregel ($\beta = 0$): $(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$

b) Summenregel ($\alpha = \beta = 1$): $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) Differenzenenregel ($\alpha = 1\, beta = -1$): $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$

Beweis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f(x) - \alpha f(x_0)) + (\beta g(x)) - \beta g(x_0))}{x - x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(\alpha f(x) - \alpha f(x_0))}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{(\beta g(x)) - \beta g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\alpha \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} + \beta \cdot \ lim_{x\to x_0} \frac{(g(x)) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)$$

qed.

Beispiel:

a.)

$$h(x) = x^2 + 3x + 7$$
$$h'(x) = 2x + 3$$

b) allgemein gilt für Polynome: Sei

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

ein Polynom vom Grade n. Dann ist $p(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und die Ableitung $p'(x)$ ist ein Polynom vom Grade $n-1$:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

c) Setzt sich die Ableitung linear aus elementaren Funktionen (wie aus der Tabelle) zusammen, so ergibt sich die Ableitung summandenweise. Eventuelle Faktoren können herausgezogen werden. Das heißt, es gelten die Regeln

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \text{ (Summenregel)}$$
$$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x) \text{ (Faktorregel)}$$

c) Man berechne die Ableitungsfunktion des Polynoms $p(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x - 12$.
$p'(x) = (4x^3)' + (5x^2)' + (3x)' + (-12)' = 12x^2 + 10x + 3$
Man erkennt, dass sich der Grad des Polynoms durch die Ableitung um 1 erniedrigt.

d) Was ist die Steigung der Funktion $f(x) = e^x + \sin x$ im Punkt $\frac{\pi}{2}$?
Es ist $f'(x) = (e^x)' + (\sin x)' = e^x + \cos x$ und damit hat die Steigung den Wert $f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} + \cos\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}}$

23.3 Produktregel

Satz: Produktregel
Die Funktionen $f, g : I = (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ seien in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist auch die Funktion

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

in x_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Beweis: Man stellt den Differenzenquotienten zu $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ und zu x_0 auf und bildet den Grenzübergang für x gegen x_0:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x)}{x_0 - x} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x)}{x_0 - x} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x)g(x_0)}{x_0 - x} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x)g(x)}{x_0 - x} \\
&= g(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} + [\lim_{x \to x_0} f(x)] \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} \\
&= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Die letzten drei Grenzwerte existieren und nehmen die genannten Werte an, da $f(x)$ und $g(x)$ in x_0 differenzierbar sind; da aus der Differenzierbarkeit außerdem die Stetigkeit folgt, gilt auch $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. qed.

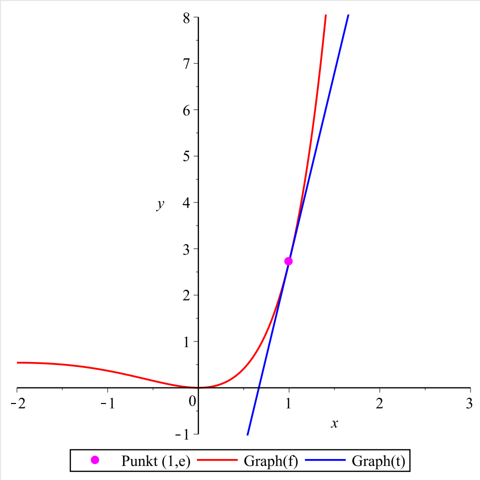
Beispiel: Sei $f(x) = x^2 \cdot e^x \Rightarrow$

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot (2 + x) \cdot e^x$$

Die Tangente an Graph(f) im Punkt $(1, e)$ ist gegeben durch

$$t(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = e + 3 \cdot e \cdot (x - 1) = 3 \cdot e \cdot x - 2 \cdot e$$

Die folgende Skizze zeigt Graph(f) und Graph(t) (also die Funktionskurve und die Tangente)



23.4 Quotientenregel

Satz: Quotientenregel
Die Funktionen $f, g : I = (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ seien in $x_0 \in I$ differenzierbar, weiterhin sei $g(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Funktion

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

in x_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis: Zunächst betrachte man den Spezialfall $f(x) \equiv 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{h(x_0) - h(x)}{x_0 - x} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}}{x_0 - x} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{x_0 - x} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x_0)g(x)} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x}}_{\to -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x_0)g(x)}}_{\to \frac{1}{g^2(x_0)}} \\
&= \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

Bei allgemeinem $f(x)$ erhält man weiter mit Hilfe der Produktregel

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right)' = \left(f(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} \right)' \\
&= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

qed.

Beispiel:

a) Sei $f(x) = \frac{1}{x^n} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} \\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+1}{x^3+x} \\
f'(x) &= \frac{2x(x^3+x)-(x^2+1)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} \\
&= \frac{-x^4-2x^2-1}{(x^3+x)^2}
\end{aligned}
$$

Folgerung: Gebrochen rationale Funktionen sind im Inneren ihres Definitionsbereichs differenzierbar.

23.5 Kettenregel

Satz: Kettenregel
Gegeben seien zwei Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ und zwei Funktionen

$$f : I \mapsto J \qquad \text{und} \qquad g : J \mapsto \mathbb{R}$$

Sind die beiden Punkte $x_0 \in I$ und $y_0 = f(x_0) \in J$ innere Punkte und ist $f(x)$ in x_0 und $g(y)$ in y_0 differenzierbar, so ist die Zusammensetzung von f und g

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

in x_0 differenzierbar. Für die Ableitung der zusammengesetzten Funktion gilt:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= (g \circ f)'(x) \\
&= g'(y_0) \cdot f'(x_0) \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Der Ausdruck $f'(x_0)$ in der letzten Gleichung heißt **innere Ableitung**. Der Ausdruck $g'(f(x_0))$ heißt **äußere Ableitung**.

Merkregel für die Kettenregel: Rechne "äußere Ableitung"mal ïnnere Ableitung".

Beweisgang: Man gewinnt die lineare Approximation von h, indem man die beiden linearen Approximationen von f und g „ineinander“ einsetzt:

$$\begin{aligned}
g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + (y - y_0)\Delta_g(y) \\
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\Delta_f(x) \\
y - y_0 &= f(x) - f(x_0) \;=\; f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\Delta_f(x)
\end{aligned}$$

Dieses in die erste Gleichung einsetzen!

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(x_0)) + (x - x_0)\underbrace{g'(y_0)f'(x_0)}_{(g\circ f)'(x_0)} + (x - x_0)\cdots \\
&\cdot \underbrace{\left(g'(y_0)\Delta_f(x) + f'(x_0)\Delta_g(f(x)) + \Delta_g(f(x))\Delta_f(x)\right)}_{\substack{\Delta_{g\circ f}(x) \quad \text{stetig} \\ =0 \quad \text{für} \quad x = x_0}}
\end{aligned}$$

Beim Nachweis der Stetigkeit von $\Delta_{g\circ f}$ beachte man, daß die Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig ist. qed.

Beispiel:

a) Die Funktion $h(x) = (x^2 + x - 7)^{10}$ soll abgeleitet werden. Man schreibt sie dazu in der Form $h(x) = g(f(x))$, d. h. als Ineinandersetzung der beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
g(y) &= y^{10} & \Rightarrow \quad g'(y) &= 10y^9 \\
f(x) &= x^2 + x - 7 & \Rightarrow \quad f'(x) &= 2x + 1
\end{aligned}$$

und wendet die Kettenregel an:

$$h'(x) \;=\; g'(f(x)) \cdot f'(x) \;=\; 10 \cdot (x^2 + x - 7)^9 \cdot (2x + 1)$$

b) Die Funktion $u(x) = e^{3x}$ soll abgeleitet werden. Man schreibt sie dazu in der Form $u(x) = g(f(x))$, d. h. als Ineinandersetzung der beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
g(y) &= e^y & \Rightarrow \quad g'(y) &= e^y \\
f(x) &= 3x & \Rightarrow \quad f'(x) &= 3
\end{aligned}$$

und wendet die Kettenregel an:

$$u'(x) \;=\; g'(f(x)) \cdot f'(x) \;=\; e^{3x} \cdot 3 = 3 \cdot e^{3x}$$

c) Die Funktion $v(x) = sin(a \cdot x + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ soll abgeleitet werden. Man schreibt sie dazu in der Form $v(x) = g(f(x))$, d. h. als Ineinandersetzung der beiden Funktionen

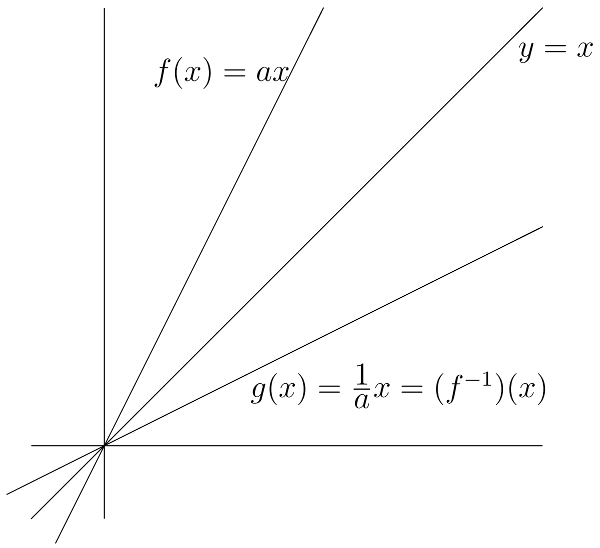
$$\begin{aligned}
g(y) &= sin(y) & \Rightarrow \quad g'(y) &= cos(y) \\
f(x) &= a \cdot x + b & \Rightarrow \quad f'(x) &= a
\end{aligned}$$

und wendet die Kettenregel an:

$$v'(x) \;=\; g'(f(x)) \cdot f'(x) \;=\; cos(a \cdot x + b) \cdot a = a \cdot cos(a \cdot x + b)$$

23.6 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz: Ableitung der Umkehrfunktion



Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offenen Intervalle, und sei

$$f : I \mapsto J \qquad \text{bijektiv.}$$

Sei weiter f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion

$$g(y) = (f^{-1})(y) : J \mapsto I$$

im Punkte $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und für ihre Ableitung gilt

$$g'(y_0) \;=\; \left(f^{-1}\right)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweisidee: $g(y)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x)$; die Ineineindersetzung dieser Funktionen liefert daher

$$(f \circ g)\,(y) \;=\; y$$

Leitet man beide Seiten dieser Gleichung nach y ab, so liefert die rechte Seite den konstanten Wert 1, auf die linke Seite läßt sich die Kettenregel anwenden:

$$(f \circ g)'(y_0) = f'(g(y_0)) \cdot g'(y_0) = 1$$

Auflösen der letzten Gleichung nach $g'(y_0)$ liefert dann

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

qed.

Beispiele:

a) Betrachte $y = f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$. $f(x)$ ist die Umkehrfunktion von $x = g(y) = y^2$. Für die Ableitung von $f(x)$ folgt daher

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= (g^{-1})'(x) &= \frac{1}{g'(y)} \\ &= \frac{1}{2y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Betrachte $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Man betrachte zunächst $y = h(x) = \sqrt[3]{x}$. Dieses ist die Umkehrfunktion von $g(y) = y^3$; für die Ableitung folgt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{g'(y)} &= \frac{1}{3y^2} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Die Ableitung von $f(x) = h(x^2 + 1)$ erhält man nun aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x^2+1) \cdot 2x \\ &= \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot x \end{aligned}$$

c) Betrachte $y = f(x) = ln(x)$. $f(x)$ ist die Umkehrfunktion von $x = g(y) = e^y$. Für die Ableitung von $f(x)$ folgt daher

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} &= \frac{1}{e^y} \\ &= \frac{1}{e^{ln(x)}} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Satz: Seien $n, p, q \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\text{a)} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}}$$

$$\text{b)} \quad \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Beweisidee: a) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion von $g(y) = y^n$.
b) $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ läßt sich schreiben als $f(x) = (g \circ h)(x)$ mit $g(x) = \sqrt[q]{x}$ und $h(x) = x^p$; man verwende die Kettenregel!

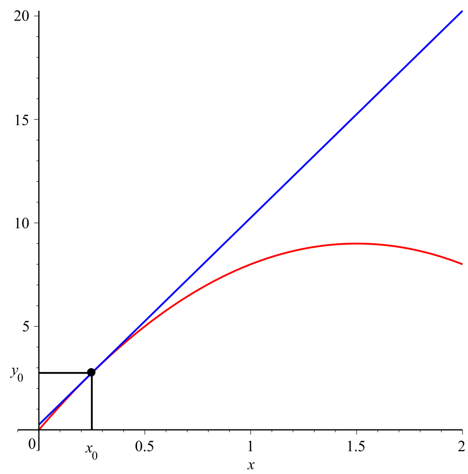
24 Lineare Approximation und das Newton-Verfahren

24.1 Lineare Approximation

Die Tangente(nfunktion)

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ist eine (affin) **lineare** Funktion.



Die Tangente ist die **„beste“ Annäherung (Approximation)** an die Funktionkurve Graph(f) durch eine (affin) lineare Funktion in der "Nähe"des Punktes $(x_0, f(x_0))$. Es gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{=t(x)} + Rest(x, x_0)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Rest(x, x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (\frac{f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - f'(x_0))$$

$$= \lim_{x \to x_0} (\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}) - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Bemerkung: Die Tangentengleichung

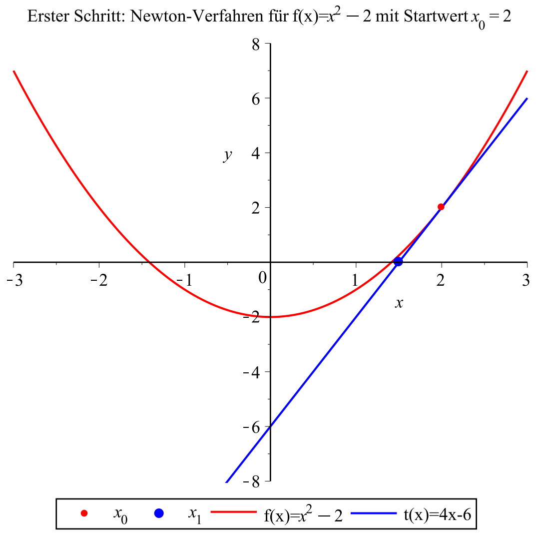
$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

entspricht dem (im nächsten Kapitel einzuführenden) Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0.
Das Konzept des Taylorpolynoms erweitert die Idee der „(lokal) besten Approximation“ einer Funktion auf Polynome höheren Grades also z.B. auf quadratische, kubische oder biquadratische Parabeln.

24.2 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Die **Nullstellen** einer Funktion[19] $f : I \mapsto \mathbb{R}$ sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Nur in seltenen Fällen (z.B. bei linearen und quadratischen Gleichungen) gibt es Lösungsformeln zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, also Formeln, die auf dem Umstellen und Auflösen der Terme der Gleichung beruhen. Der norwegische Mathematiker Nils Hendrik Abel bewies 1824, dass eine allgemeine Gleichung 5. Grades nicht durch eine „Formel“, die nur Wurzeln und arithmetische Grundoperationen enthält, gelöst werden kann. Die Existenz solcher Nullstellen ist aber z.B. bei stetigen Funktionen über den „Zwischenwertsatz“ nachweisbar.
Das auf Isaac Newton zurückgehende **numerische Näherungsverfahren** gibt uns die Möglichkeit, Näherungslösungen mit vorgegebener Genauigkeit zu bestimmen. Im Folgenden wird die Grundidee dargestellt:

[19] Wir setzen voraus, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist und $f'(x) \neq 0$ gilt.



Zu einem Startwert x_0 wird die Tangentengleichung im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an Graph(f) aufgestellt
$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
und dann als „bessere Näherung“ für die gesuchte Nullstelle von $f(x)$ die Nullstelle x_1 mit $t(x_1) = 0$ dieser Tangentengleichung berechnet, also:
$t(x_1) = 0 \Leftrightarrow 0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$
$\Leftrightarrow -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$
$\Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Dieses Verfahren wird iterativ fortgesetzt, d.h. im nächsten (2.) Schritt spielt x_1 die Rolle des Startwerts x_0 und es wird die nächste Näherung $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ berechnet, allgemein wird aus der n-ten Näherung x_n die (n+1)-te Näherung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

berechnet.
Man erhält so ausgehend vom Startwert x_0 die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Falls diese Folge konvergiert [20] gilt bei stetigen Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ für den Grenzwert $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$: $f(x_\infty) = 0$, d.h. x_∞ ist eine gesuchte Nullstelle.

Konkret erhält man für $f(x) = x^2 - 2$ mit Startwert $x_0 = 2$ im ersten Schritt des Newton-Verfahrens

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} \Leftrightarrow x_1 = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 - \frac{2}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

und allgemein als „Bildungsgesetz“ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

also[21]

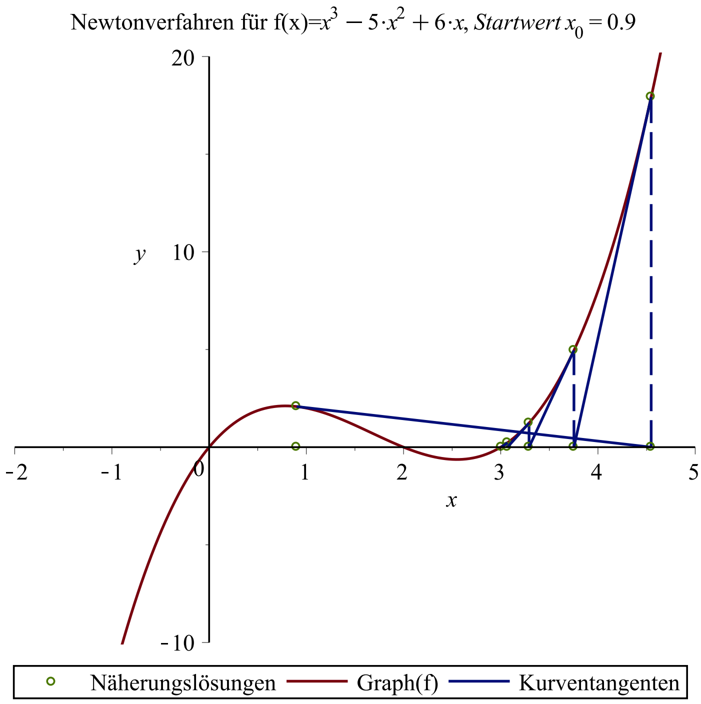
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$$

[20] Das Newton-Verfahren konvergiert, falls der Startwert x_0 „genügend nahe“ bei einer Nullstelle liegt.
[21] Diese letzte Formel $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$nennt man auch Heron-Verfahren oder Babylonisches Wurzelziehen

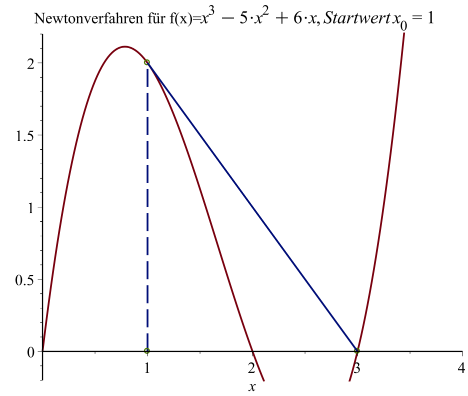
Man bekommt so ausgehend von $x_0 = 2$ die Werte $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1,416666$, $x_3 = 1,414215$ und $x_4 = 1,414213$ dies entspricht dem Wert der „exakten" Nullstelle $x = \sqrt{2}$ auf 6 Nachkommastellen.

Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass bei „nicht ganz günstiger" Auswahl des Startwerts x_0 eine andere, als die „nächstliegende" Nullstelle gefunden werden kann (wenn das Verfahren überhaupt konvergiert):

Wir betrachten $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$ mit den Nullstellen bei $x = 0$, $x = 2$ und $x = 3$. Das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 0,9$ liefert nicht etwa eine der „naheliegenden" Nullstellen $x = 0$ oder $x = 2$ sondern die dritte Nullstelle $x = 3$.



Man bekommt ausgehend von $x_0 = 0,9$ die Werte $x_1 = 4,547$, $x_2 = 3,752$, $x_3 = 3,291$, $x_4 = 3,069$ und $x_5 = 3,069$ dies entspricht schon recht gut dem Wert der „exakten" Nullstelle $x = 3$.
Wenn man den Startwert nur ein wenig variiert zu $x_0 = 1$ erhält man nach nur einer Iteration die Nullstelle $x = 3$! Dies verdeutlicht (auch im Fall der Konvergenz) die Abhängigkeit des Verfahrens vom Startwert x_0.



Mit Startwert $x = 1$ erhält man nach 1 Iteration die Nullstelle x=3 von $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

25 Höhere Ableitungen

25.1 Definitionen

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in D (global) differenzierbar, existiert die 1. Ableitung(sfunktion) $f' : D \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ für jedes $x \in D$.
Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, nennt man $f : D \to \mathbb{R}$ (einmal) stetig differenzierbar.

Definition:

Existiert für $x_0 \in D$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, so ist f in $x_0 \in D$ zweimal differenzierbar.

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

heißt 2. Ableitung von f in $x_0 \in D$.
Ist f' in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, erhält man die 2. Ableitung(sfunktion) $f'' : D \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f'(t) - f'(x)}{t - x}$ für $x \in D$.

Bemerkung:
Für das "praktischer Rechnen"bleibt alles beim Alten:
Es ist $f''(x) = (f')'(x)$, d.h. man fasst f' als eigenständige Funktion auf und leitet diese dann mit den bekannten Ableitungsregeln ab!

Beispiele

$$f_1(x) = x^3 \Rightarrow f_1'(x) = 3x^2 \Rightarrow f_1''(x) = 3 \cdot (2x) = 6x$$

$$f_2(x) = x \cdot e^x \Rightarrow f_2'(x) = e^x + x \cdot e^x$$
$$\Rightarrow f_2''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = 2e^x + xe^x$$

$$f_3(x) = \sin(3x) \Rightarrow f_3'(x) = 3 \cdot \cos(3x)$$
$$\Rightarrow f_3''(x) = 3 \cdot (-3\sin(3x)) = -9\sin(3x)$$

$$f_4(x) = \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow f_4'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$$\text{Quotientenregel} \Rightarrow f_4''(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{3x^2+1} - 3x \cdot \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}}{(\sqrt{3x^2+1})^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1} - \frac{3x^2}{\sqrt{3x^2+1}}}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3x^2+1} \cdot \sqrt{3x^2+1} - 3x^2}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$$

$$= 3 \cdot \frac{3x^2+1-3x^2}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$$

$$= \frac{3}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}} = 3 \cdot (3x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

Bemerkung:
Statt $f''(x)$ schreibt man auch $f^{(2)}(x)$.
Diesen Prozess kann man jetzt iterativ fortsetzen, z.B. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und dann

$$\underbrace{f'''(x)}_{=f^{(3)}(x)} = \frac{d^3 f}{dx^3} = \lim_{t \to x} \frac{f''(t) - f''(x)}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{6t - 6x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{6(t-x)}{t-x} = 6$$

Auch dies ist eine „Anwendung“ der Ableitungsregeln auf die „eigenständige Funktion“ $f''(x) = 6x$!
Wir erhalten somit formal die

Definition:
Gegeben ist $f : D \to \mathbb{R}, \tilde{x_0} \in D$.
f hat $(n-1)$ Ableitungsfunktionen $f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)} : \quad \tilde{D} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{D} \subseteq D$. Existiert

für $\tilde{x_0} \in \tilde{D} \subseteq D$ der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\tilde{x}} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\tilde{x_0})}{x - \tilde{x_0}}$, so ist f in $\tilde{x_0} \in D$ n-mal differenzierbar.

$$f^{(n)}(\tilde{x_0}) = \frac{d^n f}{dx^n}(\tilde{x_0}) = \lim_{x\to\tilde{x}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\tilde{x_0})}{x - \tilde{x_0}}$$

heißt n-te Ableitung von f in $\tilde{x_0} \in \tilde{D} \subseteq D$.
Ist $f^{(n-1)}$ in jedem Punkt $x \in \tilde{D} \subseteq D$ differenzierbar, erhält man die n-te Ableitung(sfunktion) $f^{(n)} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{(n)}(x) = \lim_{t\to x} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x)}{t - x} \quad \text{für} \quad x \in \tilde{D}$$

25.2 Beispiele

1) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$
$f'''(x) = f^{(3)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3}$
Man erkennt für $k < n$ gilt
$f^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k}$
und
$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0$
$\qquad = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$
$f^{(n+1)}(x) = 0, f^{(n+k)}(x) = 0$ für alle $k \geq 1$

2) $g(t) = \sin(t) \Rightarrow g'(t) = \cos(t)$

$g''(t) = -\sin(t)$
$g'''(t) = g^{(3)}(t) = -\cos(t)$
$g^{(4)}(t) = -(-\sin(t)) = \sin(t) = g(t)$
Setzt man $g^{(0)}(t) = g(t)$, so hat man

$$g^{(n)}(t) = \begin{cases} g^{(0)}(t) = \sin(t) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k \\ g'(t) = \cos(t) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k + 1 \\ g''(t) = -\sin(t) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k + 2 \\ g'''(t) = -\cos(t) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k + 3 \end{cases}$$

3) $h(x) = \cos(x) \Rightarrow h'(x) = -\sin(x)$

$$h''(x) = -\cos(x)$$
$$h'''(x) = h^{(3)}(x) = \sin(x)$$
$$h^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Wie im Beispiel 3) hat man mit $h^{(0)}(x) = h(x) = \cos(x)$

$$h^{(n)}(x) = \begin{cases} h^{(0)}(x) = \cos(x) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k \\ h'(x) = -\sin(x) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k + 1 \\ h''(x) = -\cos(x) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k + 2 \\ h'''(x) = \sin(x) & \text{für} \quad n = 4 \cdot k + 3 \end{cases}$$

4) $u(s) = exp(s) = e^s \Rightarrow u'(s) = e^s, u''(s) = e^s, \ldots$
also $u^{(n)}(s) = u(s) = e^s$ für alle $n \in \mathbb{N}$

26 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

26.1 Extrema von Funktionen

Gegeben ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in [a, b]$.
Eine Umgebung $U(x_0)$ für einen „inneren Punkt“ $x_0 \in (a, b)$ ist ein Intervall der Form $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset [a, b]$ für ein $\epsilon > 0$. Für die Randpunkte des Intervalls $[a, b]$ hat man $U(a) = [a, a + \epsilon) \subset [a, b]$ bzw. $U(b) = (b - \epsilon, b] \subset [a, b]$ für ein $\epsilon > 0$.

Definition:
Eine Funktion $f : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei gegeben.
a) f hat in $x_0 \in I$ ein **relatives Maximum** (**relatives Minimum**), wenn es eine Umgebung $U(x_0) \subset I$ mit

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

für alle $x \in U(x_0)$ gibt. Ein **relatives Extremum** ist ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum.

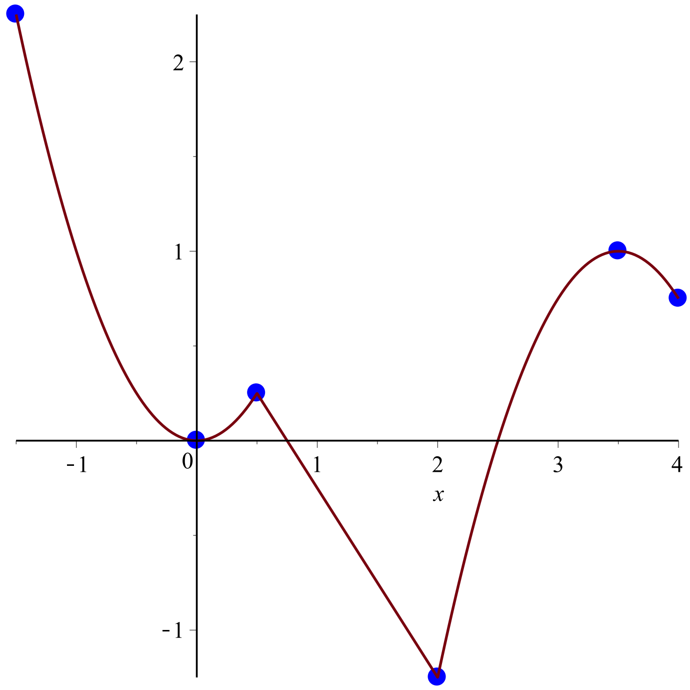
b) f hat in $x_0 \in I$ ein **absolutes Maximum** (**absolutes Minimum**), wenn **für alle** $x \in I$ gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

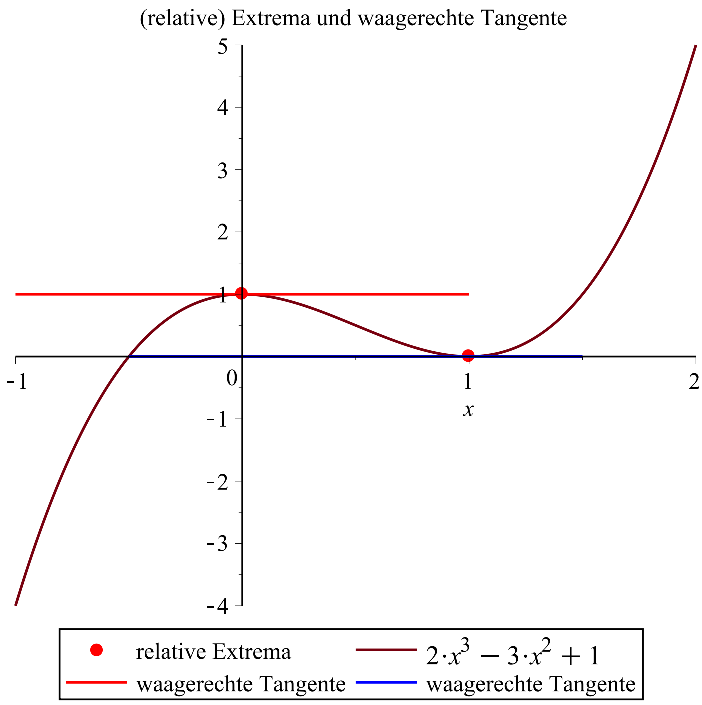
Ein **absolutes Extremum** ist ein absolutes Maximum oder ein absolutes Minimum.

c) Die **Extrema** einer Funktion sind die **absoluten Extrema** und die **relativen Extrema**!

d) Ein Punkt $(x_0, f(x_0)) \in Graph(f)$ heißt **absoluter/relativer Hochpunkt**, falls $f(x)$ in x_0 ein absolutes/relatives Maximum hat und **absoluter/relativer Tiefpunkt**, falls $f(x)$ in x_0 ein absolutes/relatives Minimum hat. Hochpunkte und Tiefpunkte werden auch **Extremalpunkte** genannt.



Satz:
$f : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei in dem **inneren Punkt** $x_0 \in I$ **differenzierbar** und habe dort ein **Extremum**; dann ist $f'(x_0) = 0$.
Der Graph(f) hat dann also in $(x_0, f(x_0))$ eine **waagerechte Tangente**.



Beweis: In x_0 liege etwa ein Maximum vor. Für alle $x \in I$ hinreichend nahe bei x_0 ist dann $f(x_0) - f(x) \geq 0$. Damit folgt

$$0 \leq \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\overbrace{f(x_0) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{x_0 - x}_{\geq 0}} = f'(x_0)$$

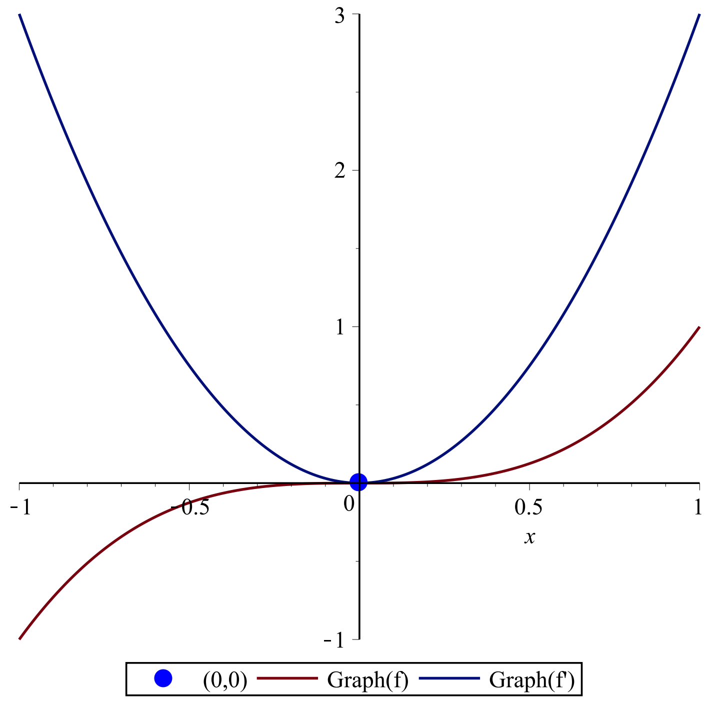
Zähler und Nenner sind positiv; der Bruch ist daher insgesmt positiv.

$$= \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\overbrace{f(x_0) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{x_0 - x}_{\leq 0}} \leq 0$$

Der Zähler ist positiv und der Nenner ist negativ; der Bruch ist daher insgesmt negativ.

Wegen $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ ist somit $f'(x_0) = 0$. qed.

Bemerkung: Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.
Beispiel: Die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ von $f(x) = x^3$ hat in $x_0 = 0$ den Wert 0, jedoch hat f dort kein Extremum.



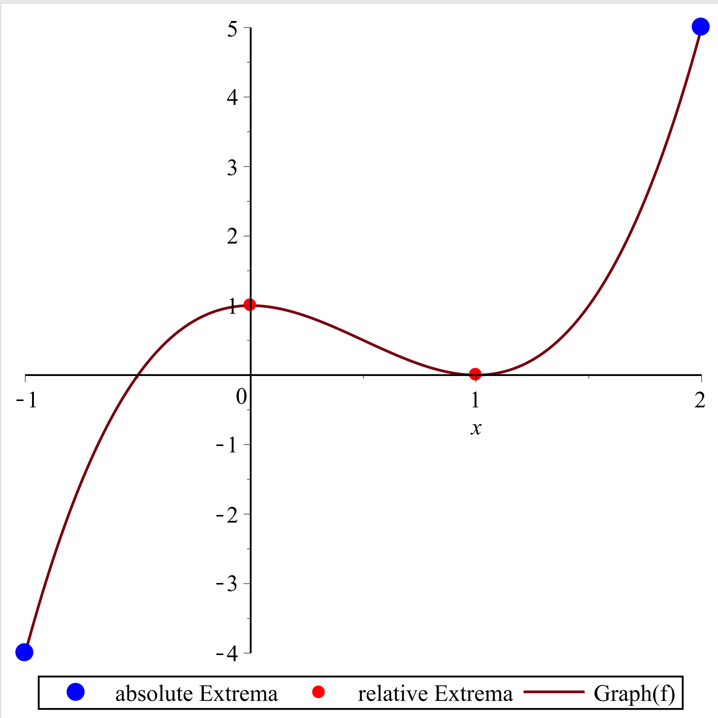
Satz (Kandidaten für Extrema):

Gegeben ist die Funktion $f : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. $x_0 \in I$ ist ein **Kandidat für ein Extremum**, wenn gilt:

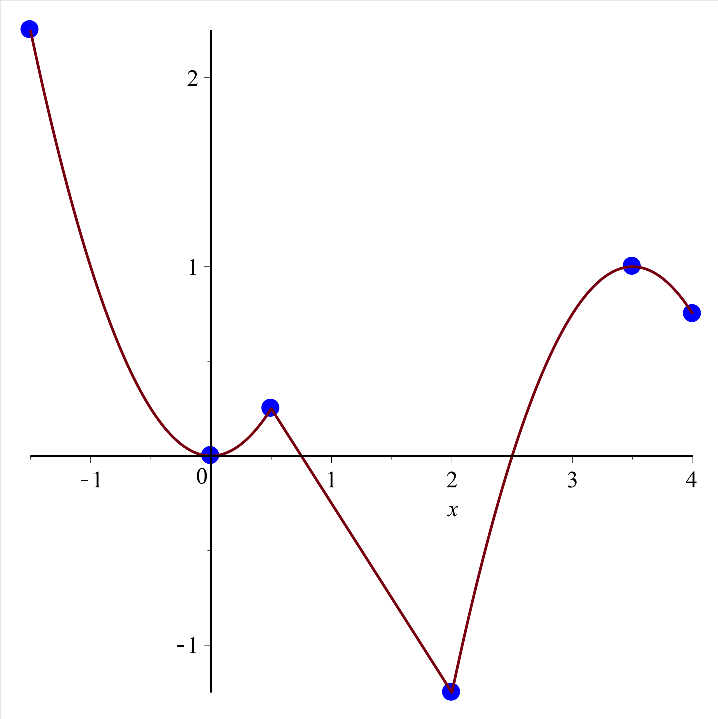
x_0 ist **Randpunkt** von I
oder x_0 ist ein **innerer Punkt von** I **und** $f'(x_0) = 0$
oder $f(x)$ ist in $x_0 \in I$ **nicht differenzierbar**.

Beispiel:

a) Das absolute Maximum der Funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1, +2]$ soll bestimmt werden: Das absolute Maximum liegt entweder bei einem der beiden Randpunkte $x = -1$ oder $x = 2$, oder das absolute Maximum liegt im Inneren des Intervalls; im zweiten Fall befindet sich das Maximum (da $f(x)$ (global) differenzierbar ist) bei einer der Nullstellen von $f'(x) = 6x^2 - 6x$, d. h. bei $x = 1$ oder bei $x = 0$. Der größte Wert, den $f(x)$ bei einen der vier in Frage kommenden Punkten annimmt ist $f(2) = 5$, also wird das Maximum bei $x = 2$ angenommen.



b) Wir betrachten jetzt exemplarisch das folgende Beispiel



Die dargestellte Funktion ist gegeben als
$f : \left[-\frac{3}{2}, 4\right] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{wenn } -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2}; \\ \frac{3}{4} - x, & \text{wenn } \frac{1}{2} \leq x < 2; \\ -x^2 + 7 \cdot x - \frac{45}{4} & \text{wenn } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Kandidaten für Extrema sind dann:

a) die Randpunkte $x = -\frac{3}{2}$ und $x = 4$

b) die Stellen, an denen $f(x)$ nicht differenzierbar ist, also $x = \frac{1}{2}$ und $x = 2$

c) die Stellen mit $f'(x) = 0$, also $x = 0$ und $x = \frac{3}{2}$

Die genauere Klassifizierung des Typs des Extremums diskutieren wir später!

26.2 Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz

Satz: (Rolle)
$f : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei auf I stetig und auf (a, b) differenzierbar; weiter sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0$$

Beweis: Die Idee des Beweises besteht darin, das Vorhandensein eines relativen Extremums von f in I nachzuweisen. Man unterscheidet zwei Fälle:

1. Sei $f(x) \equiv c$ die konstante Funktion; dann ist $f'(x) \equiv 0$, und jedes $\xi \in (a, b)$ leistet das gewünschte.

2. f sei nicht konstant. Wegen der Stetigkeit nimmt f auf I Minimum und Maximum: seien $x_1, x_2 \in I$ mit

   $$f(x_1) = \min(f) \qquad \text{und} \qquad f(x_2) = \max(f)$$

   Da f nicht konstant ist, folgt

   $$\begin{aligned} & \min(f) \neq \max(f) \\ \Longrightarrow \quad & \min(f) \neq f(a) = f(b) \quad \text{oder} \quad \max(f) \neq f(a) = f(b) \end{aligned}$$

   Sei etwa $\min(f) \neq f(a) = f(b)$. Dann gilt auch für x_1 mit $f(x_1) = \min(f)$

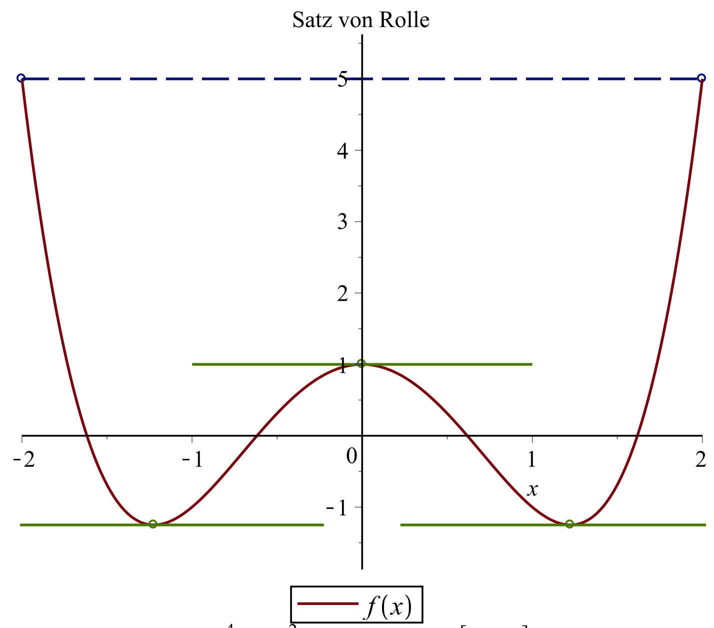
   $$x_1 \neq a \qquad \text{und} \quad x_1 \neq b$$

   Das heißt: x_1 ist kein Randpunkt, und $f(x_1)$ ist somit ein relatives Extremum. Daher ist $f'(x_1) = 0$; man setze $\xi = x_1$.

qed.

Beispiel:

1.) Veranschaulichung des Satzes: Unter den Voraussetzungen des Satzes von Rolle gilt: Ist $f(a) = f(b)$ so gibt es zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (mindestens) einen Punkt $(\xi, f(\xi))$ in dem Graph(f) eine waagerechte Tangente (Tangente mit Steigung 0) hat.



Die Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ im Intervall $[-2, 2]$: Der Graph von $f(x)$, die Kurvensekante zwischen $(-2, f(-2))$ und $(2, f(2))$ und Tangenten parallel zur Sekante..

2.) Behauptung:

$$f(x) = 10x^3 + 2x + 3 \quad \text{ist injektiv.}$$

Beweis: Es ist stets

$$f'(x) = 30x^2 + 2 > 0$$

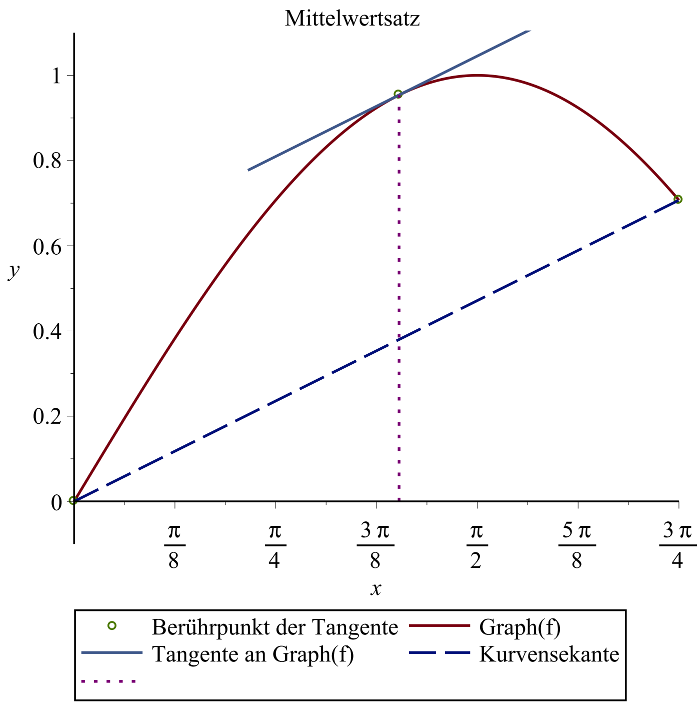
Annahme: Es gäbe $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b)$ und $a \neq b$. Nach dem Satz von Rolle gäbe es dann aber ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$; Widerspruch! qed.

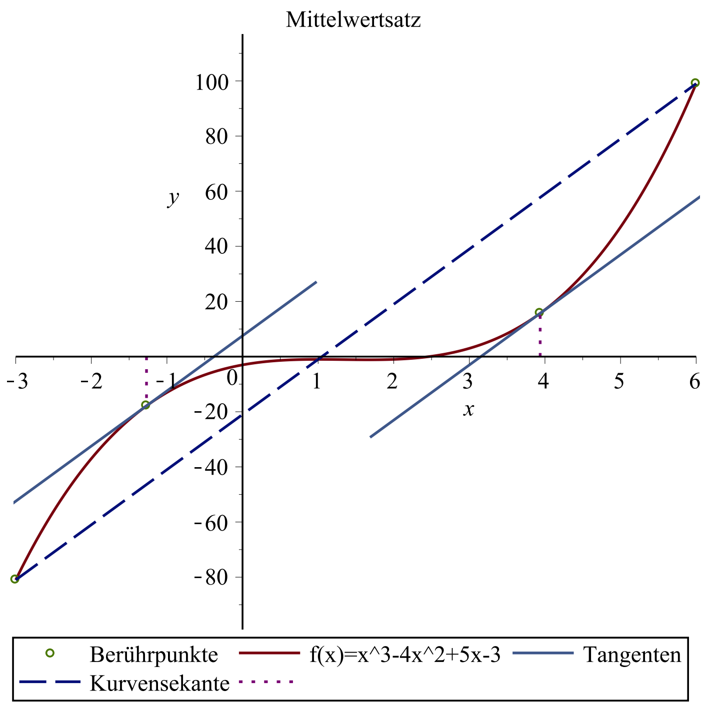
Mit Hilfe des nächsten Satzes lässt sich auf einfache Weise noch zusätzlich das strenge monotone Wachstum dieser Funktion nachweisen.

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
$f : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei auf I stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Der Mittelwertsatz besagt, dass die Ableitung $f'(x)$ den Wert des Differenzenquotient zu $(a, f(a))$ und $(, f(b))b$ im Intervall (a, b) annimmt. **Anschaulich** bedeutet dieses, dass es zur Kurvensekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ eine Tangente an Graph(f) gibt, die Graph(f) in einem Punkt $(\xi, f(\xi))$ zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ berührt.





Beweis des Mittelwertsatzes: Man setze (siehe Abbildung ??)

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Dieses ist die Gleichung der Sekanten von $f(x)$ durch a und b.

und

$$h(x) = f(x) - \varphi(x)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) && = 0 \\ h(b) &= f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right) \\ &= f(b) - f(b) && = 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es daher ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= 0 \\ &= f'(\xi) - \varphi'(\xi) \\ &= f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \Longrightarrow \quad f'(\xi) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

qed.

Beispiel: Man betrachte nochmals die Funktion

$$f(x) = 10x^3 + 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 30x^2 + 2 > 0$$

Behauptung: f ist streng monton wachsend.
Beweis: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gegeben. Nach dem Mittelwertsatz des Differentialrechnung gibt es dann ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= f'(\xi) > 0 \\ \Longrightarrow \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &> 0 \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seite dieser Ungleichung mit der positven Zahl $x_2 - x_1$, so erhält man

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Beispiel: Sei $f(x) = \sqrt{x}$ mit $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ und

$$T(x) = \sqrt{100} + (x - 100)\frac{1}{2\sqrt{100}} = 5 + \frac{x}{20}$$

die Tangente an $f(x)$ bei $x_0 = 100$. Behauptung:

$$f(x) < T(x) \qquad \text{d. h.} \qquad \sqrt{x} < 5 + \frac{x}{20} \qquad \text{für} \quad x > 100$$

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (100, x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(100)}{x - 100} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} < \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $\xi > 100$. Setzt man hier die Definition von $f(x)$ ein:

$$\frac{\sqrt{x} - 10}{x - 100} < \frac{1}{20}$$

und multipliziert man beide Seiten dier Ungleichung mit der positiven Zahl $x - 100$, so folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 10 &< (x - 100)\tfrac{1}{20} \\ \Rightarrow \qquad \sqrt{x} &< 10 + (x - 100)\tfrac{1}{20} = 5 + \tfrac{x}{20} \end{aligned}$$

Satz (Folgerungaus dem Mittelwertsatz):
$f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gilt

a) f ist konstant $\iff$ $f' \equiv 0$

b) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f ist injektiv

c) $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ für alle $x \in (a, b)$ $\iff$ f ist monoton wachsend (fallend)

d) $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ für alle $x \in (a, b)$ $\implies$ f ist streng monoton wachsend (fallend)

Beweis: a) Ist f konstant, so ist bekanntlich $f' \equiv 0$. Es sei nun $f' \equiv 0$ vorausgesetzt. Zu zeigen ist: für $x_1, x_2 \in (a, b)$ ist stets $f(x_1) = f(x_2)$. Ist $x_1 \neq x_2$, so gibt es nach dem

Mittelwertsatz ein $\xi \in (a,b)$ zwischen x_1 und x_2 mit

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) f'(\xi) \\ \Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) &= 0 \qquad\qquad \text{wegen} \quad f' \equiv 0 \\ \Longrightarrow \quad f(x_2) &= f(x_1) \end{aligned}$$

b) Seien $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 \neq x_2$. Mit einem ξ zwischen x_1 und x_2 gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) f'(\xi) \\ \Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) &\neq 0 \qquad\qquad \text{wegen} \quad f' \neq 0 \\ & \qquad\qquad\qquad \text{und} \quad (x_2 - x_1) \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad f(x_2) &\neq f(x_1) \end{aligned}$$

c) $f' \geq 0$ sei vorausgesetzt. Zu zeigen ist das monotone Wachstum von f. Seien dazu $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$. Mit einem $\xi \in (x_1, x_2)$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \\ \Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) &\geq 0 \\ \Longrightarrow \quad f(x_1) &\leq f(x_2) \end{aligned}$$

f sei nun als monoton wachsend vorausgesetzt. Dann ist für $x_0, x \in (a,b)$ der Differenzenquotien stets nicht negativ:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

Diese Ungleichung bleibt beim Grenzübergang $x \longrightarrow x_0$ erhalt, daher ist auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(x_0) \geq 0$$

d)$f' > 0$ sei vorausgesetzt. Zu zeigen ist das strenge monotone Wachstum von f. Seien dazu $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$. Mit einem $\xi \in (x_1, x_2)$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \\ \Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) &> 0 \\ \Longrightarrow \quad f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

qed.

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage d) gilt nicht. Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, jedoch ist $f'(0) = 0$.

Beispiele:

1. $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ auf $\mathbb{R}$ ist $f(x) = \arctan x$ streng monoton wachsend.
2. $\tan' x = 1 + \tan^2 x > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, da $f(x) = \tan x$ auf diesem Intervall differenzierbar ist, ist $f(x) = \tan x$ dort streng monoton wachsend.
3. Wo ist $f(x) = \sin x$ monoton wachsend? Dies ist genau dort der Fall, wo $f'(x) = \cos x \geq 0$ ist, nämlich auf den Intervallen $(2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2})$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Häufig bietet sich bei der Anwendung des Mittelwertsatzes die folgende Schreibweise an: $(x_1 < x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi) \\ &= h \cdot f'(\xi) && \text{mit} && h = x_2 - x_1 \\ &= h \cdot f'(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)) && \text{mit} && 0 \leq \vartheta \leq 1 \\ &= h \cdot f'(x_1 + \vartheta h) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1) \qquad \text{und} \qquad \vartheta = \frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1}$$

Beispiel: Es ist

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{für} \qquad x \geq 0$$

Beweis: Sei $x > 0$. Die Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktion

$$f(x) = \cos x - (1 - \frac{x^2}{2})$$

und die Punkte x und 0 liefert mit einem ϑ zwischen 0 und x

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(0) &= x \cdot f'(\vartheta x) \\ &= x \cdot (-\sin(\vartheta x) + \vartheta x) \\ &= \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(\vartheta x - \sin(\vartheta x))}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass aus geometrischen Gründen für $y > 0$ stets $\sin y \le y$ ist. Mit $y = \vartheta x$ folgt daraus

$$\sin(\vartheta x) \le \vartheta x \quad \Rightarrow \quad \vartheta x - \sin(\vartheta x) \ge 0$$

Aus $f(x) \ge 0$ für $x > 0$ folgt nun schließlich

$$\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{für} \quad x > 0$$

26.3 Zusatzmaterial: Der zweite Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz (Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Die beiden Funktionen $f, g : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ seien auf I stetig und auf (a, b) differenzierbar; zusätzlich sei $g'(x) \ne 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis: Man setze

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

und

$$h(x) = f(x) - \varphi(x)$$

Man beachte dabei, dass wegen $g'(x) \ne 0$ für $x \in (a, b)$ auf Grund des ersten Mittelwertsatzes $g(a) \ne g(b)$ ist. Es folgt nun

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) && = 0 \\ h(b) &= f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) \right) \\ &= f(b) - f(b) && = 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es daher ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= 0 \\ &= f'(\xi) - \varphi'(\xi) \\ &= f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) \\ \Longrightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} &= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \end{aligned}$$

qed.

26.4 Regeln von Bernoulli-l‘Hospital

Satz (Regeln von Bernoulli-l’Hospital) Die beiden Funktionen $f, g : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ seien auf I stetig und auf (a, b) differenzierbar; zusätzlich seien $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$. Es gelte außerdem: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Die Aussage bleibt gültig für $I = (a, +\infty)$ und $\lim_{x\to+\infty}$ sowie $I = (-\infty, b)$ und $\lim_{x\to-\infty}$.
Ebenso gilt die Aussage, wenn die Bedingung $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ bzw. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ erfüllt ist. [22]

Beweisidee:
Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gilt; dann erhält man mit Hilfe des 2. Mittelwertsatzes

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{0}}{g'(x) - \overbrace{g(x_0)}^{0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

für ein z zwischen x und x_0. Da z zwischen x und x_0 liegt gilt $\lim_{x\to x_0} \Leftrightarrow \lim_{z\to x_0}$ also hat man

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{0}}{g'(x) - \overbrace{g(x_0)}^{0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiele:

1) Wir betrachten $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = x$ mit $x_0 = 0$. Es ist $\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ und $\lim_{x\to 0} x = 0$, die übrigen Voraussetzungen des Satzes sind auch erfüllt, also gilt:
$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = e^0 = 1$

[22] Falls jetzt $f'(x)$ und $g'(x)$ weiter alle Voraussetzungen des Satzes erfüllen, kann man den Prozess fortsetzen: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Dieses Vorgehen kann - solange die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind - iterativ fortgesetzt werden, bis die Grenzwertberechnung mit algebraischen Mitteln möglich ist.

2) Wir betrachten $f(x) = \sin^2(x)$ und $g(x) = x^2 + 5x$ mit $x_0 = 0$. Es ist $\lim_{x\to 0}\sin^2(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0} x^2+5x = 0$, die übrigen Voraussetzungen des Satzes sind auch erfüllt, also gilt:
$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin^2(x)}{x^2+5x}) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{2x+5} = \frac{2\cdot 0\cdot 1}{5} = \frac{0}{5} = 0$

3) Wir betrachten $f(x) = \frac{1}{x^3+5x+1}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ mit $x_0 \to +\infty$.
Es ist $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3+5x+1} = 0$ und $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0$,
die übrigen Voraussetzungen des Satzes sind auch erfüllt, also gilt:
$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+5x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x^2+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{6x} = 0$

4) Wir betrachten $f(x) = \tan(3x)$ und $g(x) = \tan(5x)$ mit $x_0 \to \frac{\pi}{2}$.
Es ist $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(3x) = +\infty$ und $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(5x) = +\infty$,
die übrigen Voraussetzungen des Satzes sind auch erfüllt, also gilt:
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2(5x))\cdot 5}{(\cos^2(3x))\cdot 3} = \frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x}{\cos(5x)} = \frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\cdot\sin(3x)}{-5\cdot\sin(5x)} =$
$-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = -\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\sin(\frac{5\pi}{2})} = -\frac{-1}{1} = 1$

27 Taylorpolynome und der Satz von Taylor

27.1 Definition und erste Beispiele

Wir werden jetzt mit Hilfe der Ableitungen $f^{(k)}(x_0)$ einer Funktion $f(x)$ ein Polynom in $x - x_0$ angeben und den Zusammenhang zwischen diesem Polynom und der gegebenen Funktion $f(x)$ klären:

<u>Definition:</u> (Taylorpolynom)
Gegeben ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in D$.
f ist in x_0 n-mal differenzierbar. Dann heißt das Polynom

$$T_n(f;x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0}{n!}\cdot(x-x_0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

das **Taylorpolynom n-ter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt** x_0.

Bemerkung und Beispiel:

1) $T_1(f;x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
ist die Gleichung der Tangente an Graph(f) im Punkt $P(x_0, f(x_0))$. Das ist die **beste (affin)lineare Näherung (Approximation)** an f bei x_0!

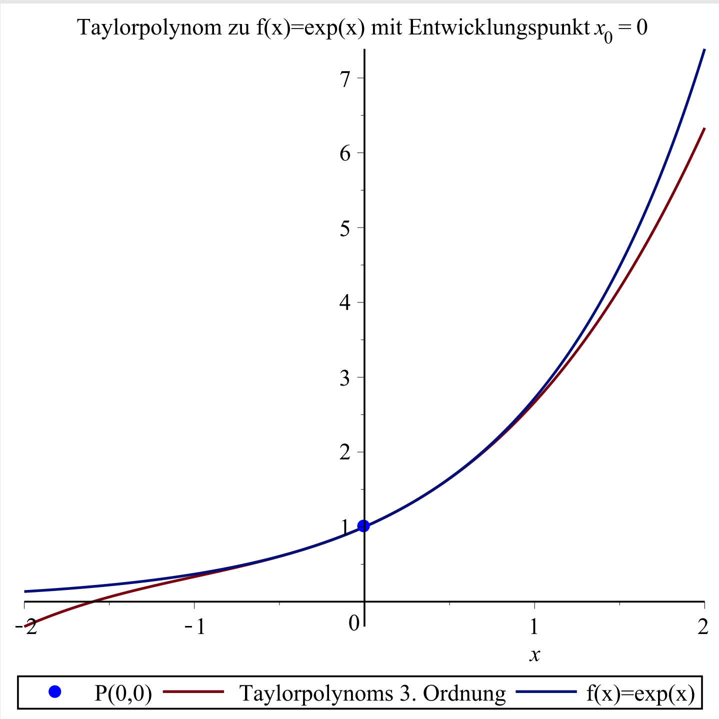
2) $T_n(f;x_0)(x)$ ist die **beste Näherung (Approximation)** an f bei x_0 **durch ein Polynom vom Grad n**!

3) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

Es ist $f^{(k)}(x) = e^x$ also $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und damit

$$T_n(e^x;0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$



4) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

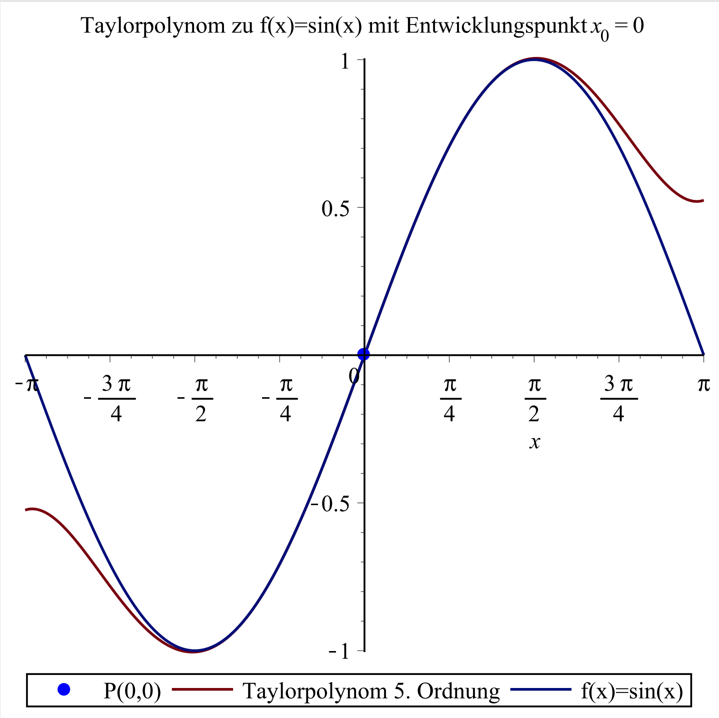
$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$ für gerade k also k = 2l

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{ für ungerade k also k = 2l+1 und zwar } f^{(2l+1)}(0) = (-1)^l$$

damit

$$T_{2n+1}(\sin(x);0)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}$$



5) $f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\cos(x)$	1
1	$-\sin(x)$	0
2	$-\cos(x)$	-1
3	$\sin(x)$	0
4	$\cos(x)$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

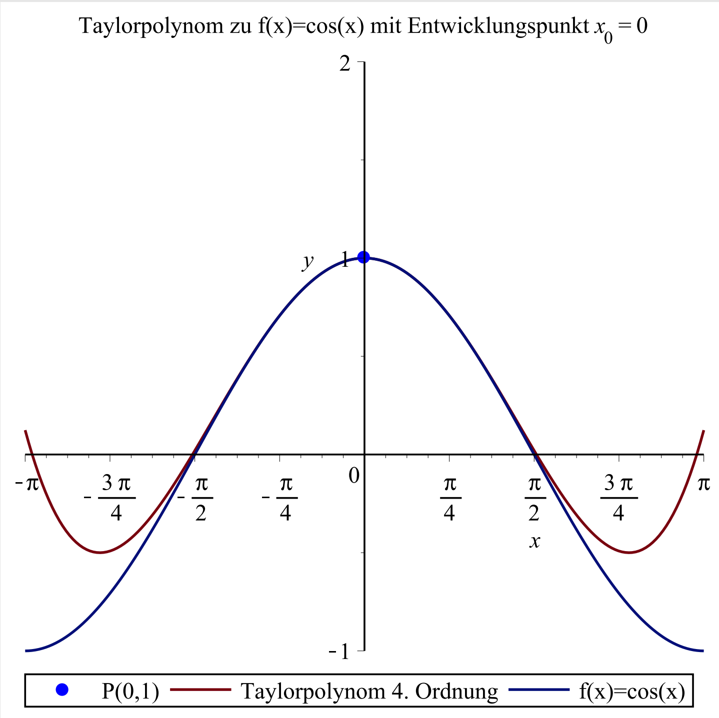
$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$ für ungerade k also k = 2l+1

$f^{(k)}(0) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ für gerade k also k = 2l und zwar $f^{(2l)}(0) = (-1)^l$

damit

$$T_{2n}(\cos(x);0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}$$



6) Wie sieht das aus, wenn der Entwicklungspunkt verändert wird?
$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \pi/2$

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(\pi/2)$
0	$\sin(x)$	1
1	$\cos(x)$	0
2	$-\sin(x)$	-1
3	$-\cos(x)$	0
4	$\sin(x)$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

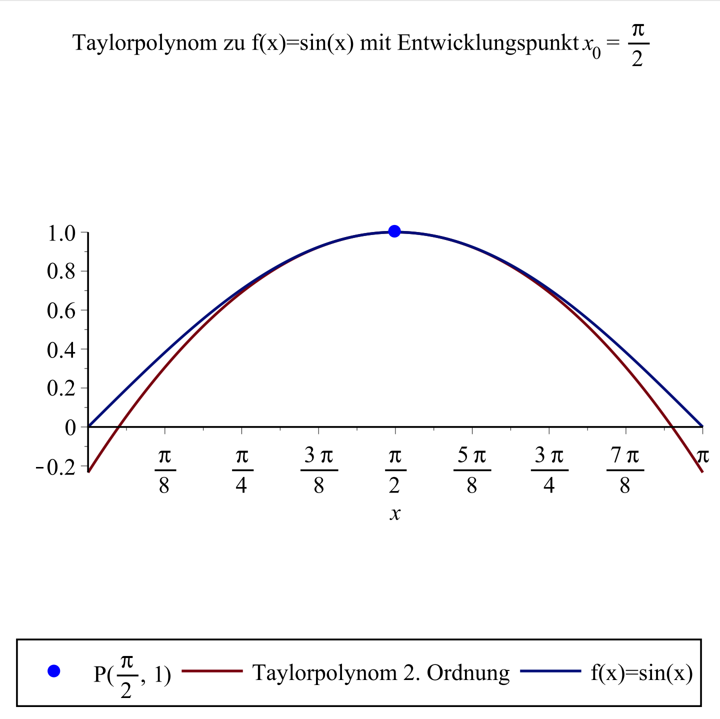
$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$ für ungerade k also k = 2l+1

$f^{(k)}(0) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ für gerade k also k = 2l und zwar $f^{(2l)}(0) = (-1)^l$

damit

$$T_{2n}(\sin(x); \pi/2)(x) \quad = \quad 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \frac{(x-\pi/2)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{(x-\pi/2)^{2l}}{(2l)!}$$



27.2 Der Satz von Taylor

Satz: (Satz von Taylor/Taylorformel)

Gegeben ist $f : D \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$.
f ist auf D (n+1)-mal differenzierbar.
Dann gilt für jedes $x \in D$ mit $[x, x_0] \subseteq D$ bzw. $[x_0, x] \subseteq D$:
Es gibt ein $\overline{x}$ zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Bemerkungen und Beispiele:

Der Satz zeigt, was das Taylorpolynom mit der Funktion zu tun hat!

a) Der **Fehler**, der entsteht, wenn man $f(x)$ durch das Taylorpolynom $T_n(f; x_0)(x)$ ersetzt, ist

$$|f(x) - T_n(f; x_0)(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!} \right| \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

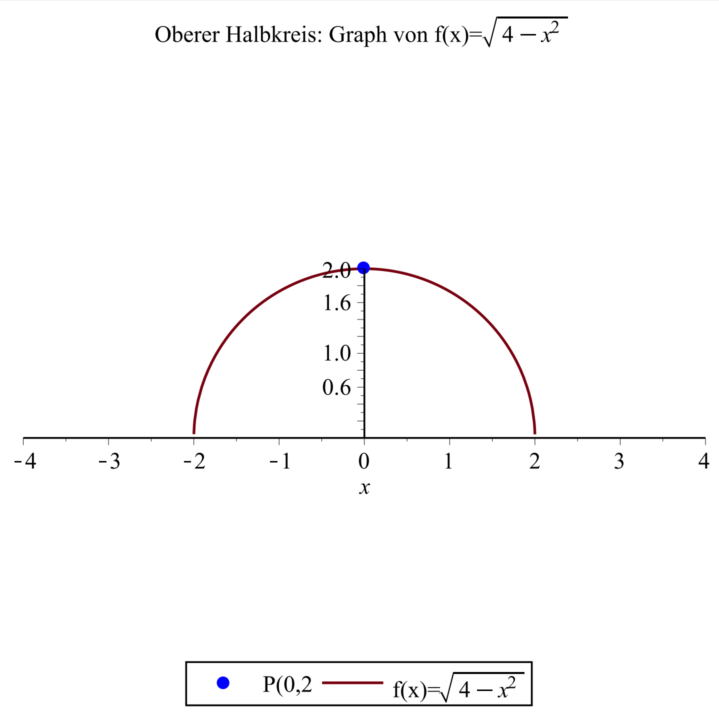
Der Fehler hängt damit wesentlich von $|x - x_0|$ also dem Abstand von x zum Entwicklungspunkt x_0 ab!

b) Was heißt das konkret? Wir betrachten ein Beispiel:

Gegeben ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

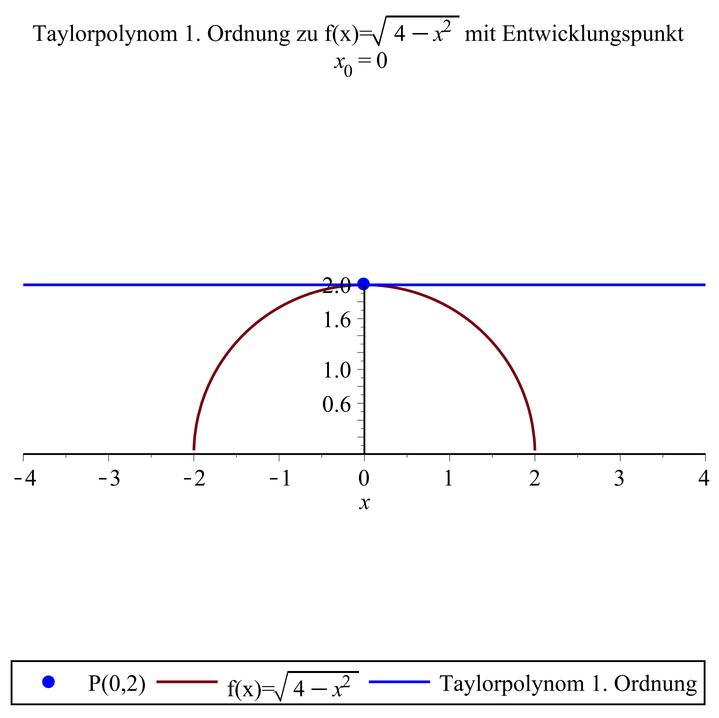
der zugehörige Graph ist der obere Halbkreis mit Radius 2



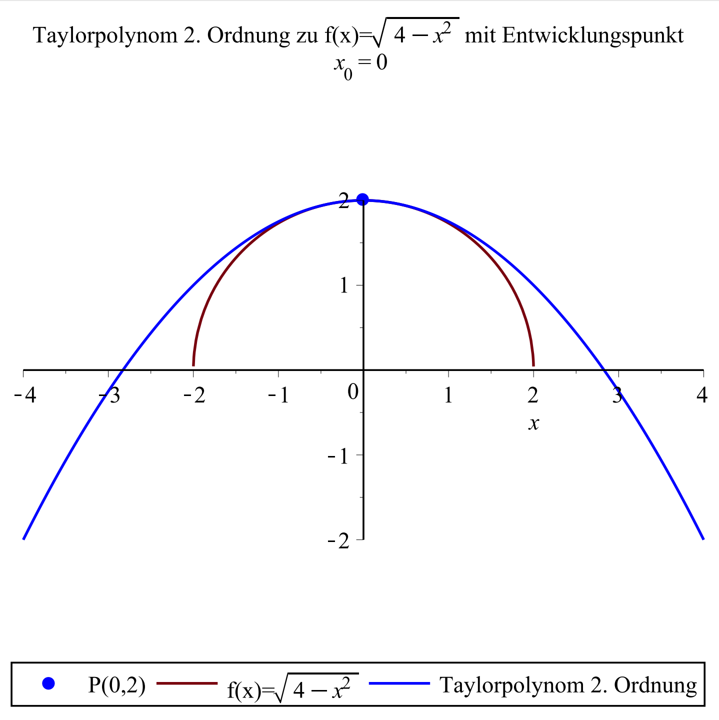
Mit zunehmender Ordnung nähern sich die Graphen der Taylorpolynome in der "Nähe"des Entwicklungspunkts x_0 immer besser dem ursprünglichen Graphen, also dem Halbkreis, an.

Wir berechnen und betrachten dazu die zugehörigen Taylorpolynome 1. Ordnung, 2. Ordnung und 6. Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

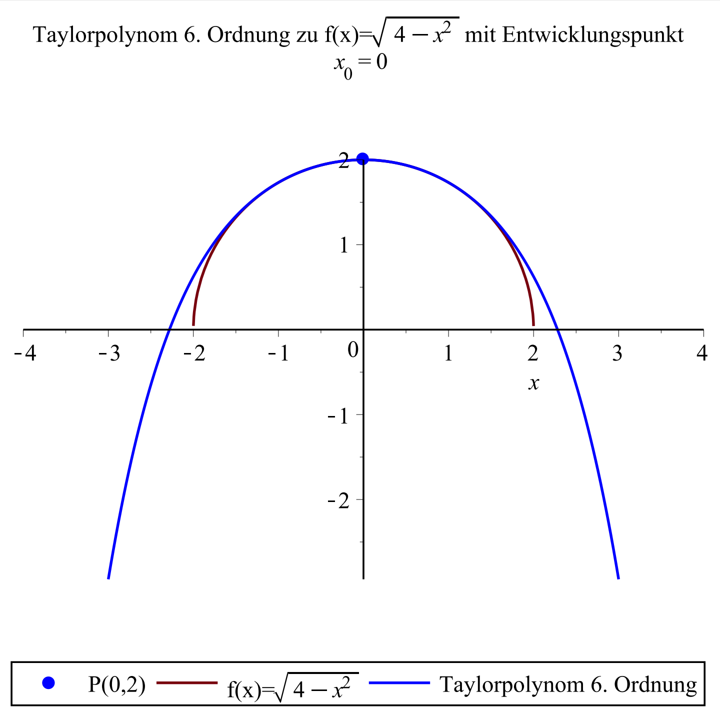
Der Graph des Taylorpolynoms 1. Ordnung entspricht der Kurventangente an Graph(f) in $(x_0, f(x_0)) = (0, 2)$,



der Graph des Taylorpolynoms 2. Ordnung entspricht der quadratischen Parabel $T_2(f;0)(x) = 2 - \frac{1}{4} \cdot x^2$,



Zum Abschluß zeigen wir noch das Taylorpolynom 6. Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ nämlich $T_6(f;0)(x) = 2 - \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{64} \cdot x^4 \frac{1}{512} \cdot x^6$



28 Kurvendiskussion, Extremwerte und Wendepunkte

Gegeben sei eine bis auf Polstellen stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$f : I \mapsto \mathbb{R} ,$$

die auf dem zugehörigen offenen Interval (α, β) bis auf Polstellen mindestens einmal stetig differenzierbar ist. Das Ziel der **Kurvendiskussion** besteht darin, dass Verhalten der Funktion f zu beschreiben. Bei der Kurvendiskussion untersucht man die folgenden Punkte:

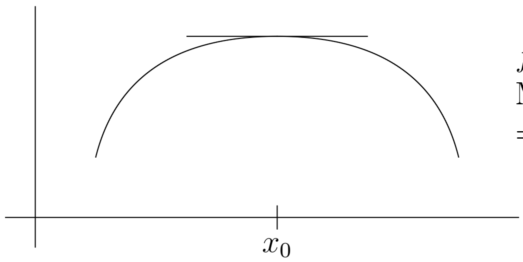
Nullstellen und Polstellen Die Zahl $x_0 \in I$ heißt **Nullstelle** von $f : I \mapsto \mathbb{R}$, falls $f(x_0) = 0$ gilt.
Die Zahl $x_0 \in I$ heißt **Polstelle** von $f : I \mapsto \mathbb{R}$, falls für die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ gilt.

Monotonie Bei der Monotonie verwendet man die Aussagen

$f(x)$ ist monoton fallend.	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$
$f(x)$ ist monoton wachsend.	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$
$f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$)	$\Rightarrow$	$f(x)$ ist streng monoton wachsend (bzw. fallend).

28.1 Klassifikation von Extrema

Bei den Extremwerten sind insbesondere die lokalen Minima und Maxima von Interesse:



$f(x)$ besitzt in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum.
$\Rightarrow\ f'(x_0) = 0$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt leider nicht (Musterbeispiel: $f(x) = x^3$ mit $x_0 = 0$); wenn man eine Nullstelle der ersten Ableitung gefunden hat, so ist noch nicht gewährleistet, dass $f(x)$ dort einen Extremwert besitzt. In einigen Fällen hilft aber die Betrachtung der zweiten Ableitung.

Satz:(„Schulkriterium“ zur Klassifikation von Extrema)
$f(x)$ sei zweimal stetig differenzierbar. Weiter sei $x_0 \in (\alpha, \beta)$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann folgt

$$\begin{array}{lcl} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow & f(x) \text{ besitzt in } x_0 \text{ ein Minimum.} \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow & f(x) \text{ besitzt in } x_0 \text{ ein Maximum.} \end{array}$$

Beispiel: Für $f(x) = \cos(x)$ und $x_0 = 0$ hat man $f'(0) = -\sin(0) = 0$ und $f''(0) = -\cos(0) = -1 < 0$. Mit Hilfe des Satzes folgt hieraus die bekannte Tatsache, dass der cos im Nullpunkt ein Maximum besitzt.

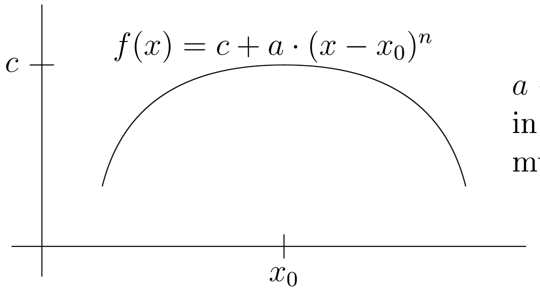
Beweis: Ergibt sich als Spezialfall aus dem allgemeineren Kriterium, siehe unten.

Was ist, wenn auch noch $f''(x_0) = 0$ ist? Um noch eine allgemeinere Aussage als die des letzten Satzes herleiten zu können, werden als grundlegende Beispiele die Funktionen

$$f(x) \quad = \quad c + a \cdot (x - x_0)^n \qquad \text{mit} \quad a, c, x_0 \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a \neq 0 \tag{28}$$

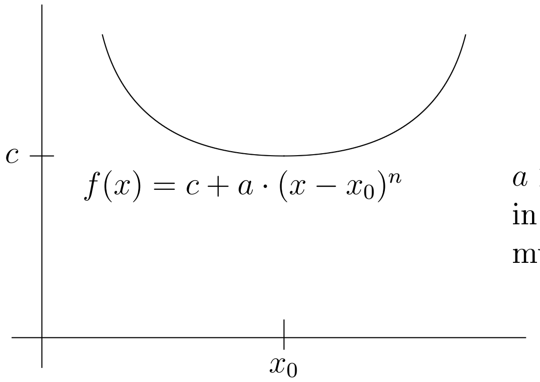
betrachtet.

1. Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$ <u>gerade</u>, dann gilt:



$a < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ besitzt in x_0 ein lokales Maximum.

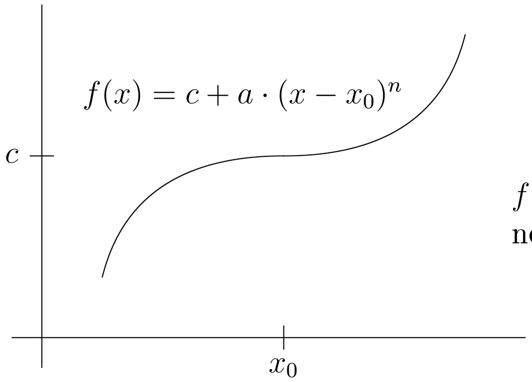
Begründung: Für $x \neq x_0$ ist wegen $a < 0$ und wegen des geraden Exponenten n der Ausdruck $a \cdot (x - x_0)^n$ negativ; damit ist $f(x) = c + a \cdot (x - x_0)^n \; < \; c = f(x_0)$.



$a > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ besitzt in x_0 ein lokales Minimum.

Begründung: Für $x \neq x_0$ ist wegen $a > 0$ und wegen des geraden Exponenten n der Ausdruck $a \cdot (x - x_0)^n$ positiv; damit ist $f(x) = c + a \cdot (x - x_0)^n \; > \; c = f(x_0)$.

2. Ist $n \in \mathbb{N}$ hingegen <u>ungerade</u>, so gilt:



$f(x)$ besitzt in x_0 keinen Extremwert.

Begründung: Im Falle $a > 0$ ist für ungerades $n \in \mathbb{N}$ und für $x < x_0$ der Ausdruck $a \cdot (x - x_0)^n$ negativ und damit $f(x) = c + a \cdot (x - x_0)^n \; < \; c = f(x_0)$. Ist dagegen $x > x_0$, so ist $a \cdot (x - x_0)^n$ positiv und damit $f(x) = a \cdot (x - x_0)^n + c \; > \; c = f(x_0)$. Dieses bedeutet, dass links von x_0 Werte angenommen werden, die kleiner als $f(x_0)$ sind und rechts von x_0 Werte angenommen werden, die größer als $f(x_0)$ sind. Die

Funktion $f(x)$ besitzt daher keinen Extremwert in x_0. Für den Fall $a < 0$ folgt diese Aussage entsprechend.

Diese Beispiele bilden die Grundlage des folgenden Satzes

Satz:
Sei $f(x)$ n-mal stetig differenzierbar mit $n \geq 2$. Sei weiter $x_0 \in (\alpha, \beta)$ mit

$$\begin{aligned} & f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \\ \text{und} \quad & f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Dann gilt:

n ist gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ besitzt in x_0 ein lokales Minimum.
n ist gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	$f(x)$ besitzt in x_0 ein lokales Maximum.
n ist ungerade	$\Rightarrow$	$f(x)$ besitzt in x_0 keinen Extremwert.

Bemerkung:

a) Gilt $f'(x_0) = 0$ und will man wissen, ob die Funktion $f(x)$ in x_0 ein lokales Minimum, Maximum oder keines von beiden besitzt, so muss man aufgrund dieses Satzes die erste der Ableitungen $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, $\ldots$ von $f(x)$ bestimmen, die in x_0 keine Nullstelle besitzt.

b) Das „Schulkriterium“ beruht auf dem einfachsten Fall: $n = 2, f''(x_0) \neq 0$

Beweisidee des Satzes: Der Beweis erfolgt durch Rückführung auf die obigen Beispiele; man nimmt dazu eine Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_0 vor. Mit dem $(n-1)$-ten Taylorpolynom und dem $(n-1)$-ten Restglied zum Entwicklungspunkt x_0 gilt für $f(x)$ die Darstellung:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n-1}(x_0, x) + R_{(n-1)}(x_0, x) \\ &= f(x_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}_{=0} + R_{(n-1)}(x_0, x) \end{aligned}$$

Diese Summe verschwindet, da nach Voraussetzung die ersten $n-1$ Ableitungen von $f(x)$ bei x_0 verschwinden. Für das $(n-1)$-te Restglied setzt man die Lagrangesche Darstellung ein:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

Dabei ist $\xi \in \mathbb{R}$ ein Wert zwischen x und x_0. Da es hier nur auf lokale Extrema ankommt, kann man annehmen, dass x sehr dicht bei x_0 liegt. Dann liegt auch ξ in der Nähe von x_0. Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ gilt dann auch

$f^{(n)}(\xi) \approx f^{(n)}(x_0)$ (zumindest haben $f^{(n)}(\xi)$ *und* $f^{(n)}(x_0)$ das selbe Vorzeichen!)

Setzt man diese Näherungsgleichung in die obige Restglieddarstellung ein, so erhält man für $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Dieses ist eine Funktion der Gestalt $c + a \cdot (x - x_0)^n$; hier lassen sich somit die Beispiele (28) anwenden, indem man

$$c = f(x_0) \quad \text{und} \quad a = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

setzt. Man beachte dabei, dass a und $f^{(n)}(x_0)$ dasselbe Vorzeichen besitzen. qed.

Beispiel: Bei der Funktion

$$f(x) = x^3 \cdot \sin x$$

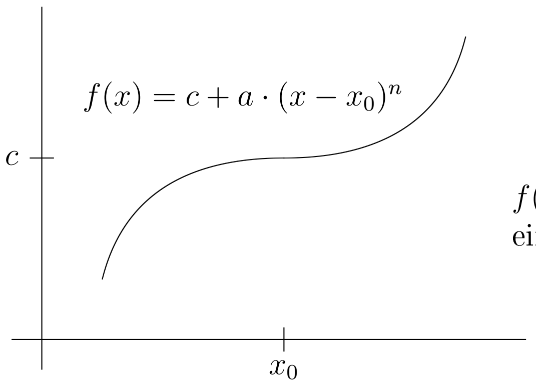
rechnet man nach, dass

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

gilt. Mit Hilfe des Satzes folgert man, dass $f(x) = x^3 \cdot \sin x$ bei $x_0 = 0$ ein Minimum besitzt.

28.2 Klassifikation von Wendepunkten

Wendepunkte geben eine Tendenzwende beim Wachstum einer Funktion an. Das Musterbeispiel für einen Wendepunkt stellt bei ungeradem $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Funktion $f(x) = c + a \cdot (x - x_0)^n$ dar:



$f(x)$ besitzt in x_0 einen Wendepunkt.

Bis zum Punkt x_0 nimmt die Steigung von $f(x) = c + a \cdot (x - x_0)^n$ ab, von x_0 an nimmt die Steigung von $f(x)$ wieder zu.

Die Definition des Wendepunktes lautet:

Definition:
$x_0 \in (\alpha, \beta)$ heißt Wendepunkt von $f(x)$, wenn $f'(x)$ an der Stelle x_0 einen Extremwert besitzt.

Bemerkung: Bei einem Wendepunkt an der Stelle x_0 besitzt die erste Ableitung $f'(x)$ nicht notwendigerweise eine Nullstelle (Beipiel: $f(x) = x^3 + x$ besitzt in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt, gleichzeitig gilt $f'(0) = 1$.)
Gilt bei einem Wendepunkt zusätzlich $f'(x_0) = 0$, so nennt man diesen Punkt **Sattelpunkt**.

Wendet man den Satz von Seite 205 auf $f'(x)$ an, so folgt aus der Definition des Wendepunktes unmittelbar:

Satz:
Sei $f(x)$ in $x_0 \in (\alpha, \beta)$ n-mal stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \\ \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Dann besitzt $f(x)$ in x_0 genau dann einen Wendepunkt, wenn n ungerade ist.

Beispiele:

1) Bei der Funktion $f(x) = \sin(x)$ gilt

$$\sin''(0) = -\sin(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1 \neq 0$$

Folglich besitzt $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Wendepunkt.

2) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4$

$$\text{notwendige Bedingung: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{4x^3}^{=f'(x)} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$f''(x) = 12x^2, \quad f''(x_0) = 0 \to$ "klassisches Schulkriterium"hilft nicht weiter

$f'''(x) = 24x, \quad f'''(x_0) = 0, \quad f^{(4)}(x) = 24$

$\Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 24 > 0, \; n = 3 \; (n + 1 = 4)$ungerade

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ ein (lokales) Minimum

Wegen $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist dies ein globales (absolutes) Minimum.

$f(0) = 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T(0,0) \in \text{Graph}(f)$

3) Wir betrachten die Funktion $g(x) = 4 \cdot x^3 \cdot \exp(-x^2)$

notwendige Bedingung: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{12x^2e^{-x^2} - 8x^4e^{-x^2}}^{=g'(x)} = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2) = 0$

damit erhält man als Kandidaten für (lokale) Extrema:

$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

$g''(x) = 24xe^{-x^2} - 24x^3e^{-x^2} - 32x^3e^{-x^2} + 16x^5e^{-x^2}$

$\quad = 24xe^{-x^2} - 56x^3e^{-x^2} + 16x^5e^{-x^2}$

$\quad = 8xe^{-x^2}(3 - 7x^2 + 2x^4)$

$g''(x_1) = g''(0) = 0 \rightarrow$ "klassisches Schulkriterium"hilft nicht weiter

$$g''(x_2) = g''(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = -8 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}(3 - 7 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2)$$

$$= -8 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}(\frac{6}{2} - \frac{21}{2} + \frac{9}{2}) = 24\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}} \;>\; 0$$

$n = 1$ $(n + 1 = 2)$ ungerade $\Rightarrow$ ("Klassisches Schulkriterium")

g hat bei $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ein (lokales) Minimum.

$$g''(x_3) = g''(+\sqrt{\frac{3}{2}}) = 8 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}(3 - 7 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2) = -24\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{\frac{3}{2}} \;<\; 0$$

$n = 1$ $(n + 1 = 2)$ ungerade $\Rightarrow$ ("Klassisches Schulkriterium")

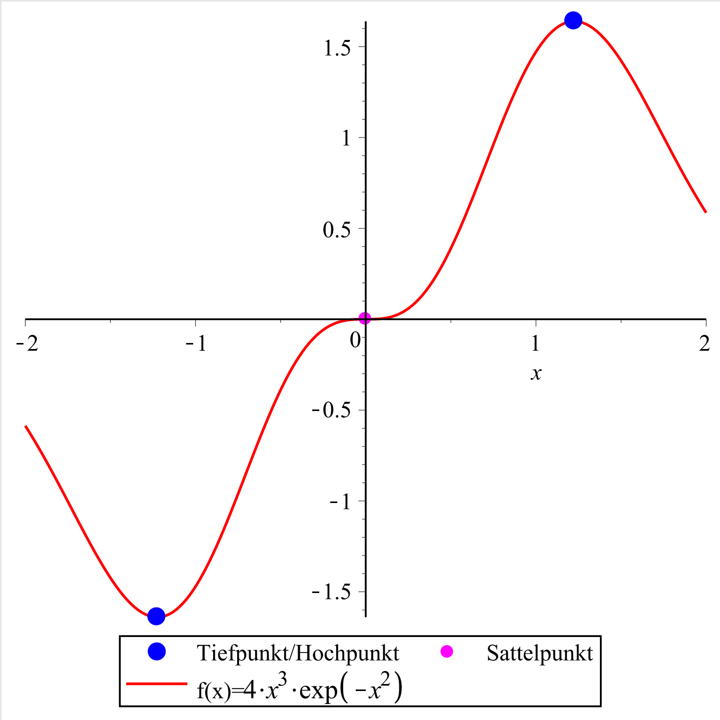
g hat bei $x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$ ein (lokales) Maximum.

Zurück zu $x_1 = 0$:

$g'''(x) = 8e^{-x^2}(3 - 7x^2 + 2x^4) - 16x^2e^{-x^2}(3 - 7x^2 + 2x^4) + 8xe^{-x^2}(-14x + 8x^3)$

$\Rightarrow g'''(x_1) = g'''(0) = 24 \neq 0$

$n = 2$ $(n + 1 = 3)$ gerade $\Rightarrow g$ hat bei $x_1 = 0$ kein Extremum, Graph(g) hat dort einen Sattelpunkt.



29 Stammfunktion und Unbestimmtes Integral

Definition:
Gegeben sei die Funktion $f : I = (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls F auf I differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$ gilt.

Bemerkung
Sucht man also eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$, muss man folgende Frage beantworten:

Welche Funktion $F : I \mapsto \mathbb{R}$ ergibt beim Differenzieren/Ableiten
$f : I \mapsto \mathbb{R}$? **Stammfunktionen berechnen** ist also in diesem Sinn die **Umkehrung zum Differenzieren/Ableiten**[23]

[23]Im Schülerjargon sagt man deshalb auch **„aufleiten"!**

Beispiele:

$f_1(x) = 3 \Rightarrow F_1(x) = 3x$ denn $F_1'(x) = 3$
aber auch $\tilde{F}_1(x) = 3x - 10$ denn $\tilde{F}_1'(x) = 3$

$f_2(x) = \exp(2x) \Rightarrow F_2(x) = 1/2 \cdot \exp(2x)$ denn $F_2'(x) = \exp(2x)$

$f_3(x) = -3\cos(x) \Rightarrow F_3(x) = -3\sin(x)$ denn $F_3'(x) = -3\cos(x)$

$f_n(x) = x^n \Rightarrow F_n(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ denn $F_n'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n = x^n$

Satz: (Beweis durch Ableiten!)

1) Sind $F, G : I \mapsto \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$, dann ist $\alpha F + \beta G : I \mapsto \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\alpha f + \beta g : I \mapsto \mathbb{R}$ für alle $\alpha\, \beta \in \mathbb{R}$.

Beispiel:
$\alpha f(x) + \beta g(x) = 3x^2 + x \Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$

2) Durch „Lesen einer Ableitungstabelle von links nach rechts“ erhält man sofort folgende Tabelle:

Funktion f	Stammfunktion F	Definitionsbereich
x^k, $k \in \mathbb{N}_0$	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
x^k, $k = -2, -3, \ldots$	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1}$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert = ln(x)$	$x \neq 0$
x^a, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$x > 0$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert < 1$
$\exp x$	$\exp x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq (k+\frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$

Beispiel:
$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{3} \cdot \sin(x) + 12 \Rightarrow F(x) = 2 \cdot \arctan(x) - \sqrt{3} \cdot \cos(x) + 12x$

Satz:
Die Funktionen F_1 und F_2 seien beide Stammfunktion der Funktion $f : I = (a,b) \mapsto \mathbb{R}$. Dann unterscheiden sich F_1 und F_2 nur um eine Konstante: Es ist für alle $x \in I$

$$F_1(x) = F_2(x) + c \qquad \text{mit einer Konstanten} \quad c \in \mathbb{R}$$

Beweis: Man betrachte die Funktion $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$; für G folgt:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F_1'(x) - F_2'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \\ \Longrightarrow G(x) &\equiv c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \Longrightarrow F_1(x) &= F_2(x) + c \end{aligned}$$

Siehe die Folgerung aus dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung!

Bemerkung zur Schreibweise: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ folgt aus dem eben bewiesenen Satz, dass jede andere Stammfunktion von $f(x)$ die Darstellung $F(x)+c$ mit einer geeigneten reellen Konstanten c hat.
Für die "Menge aller Stammfunktionen"der Funktion $f(x)$ schreibt man[24]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dieser Ausdruck heißt das unbestimmte Integral von f. Für eine gegebene Stammfunktion F von f ist dann auf Grund des vorherigen Satzes

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.[25]
Das Zeichen $\int$ heißt **Integralzeichen**, $f(x)$ heißt **Integrand** und x ist die **Integrationsvariable**.

Beispiele:

1. $\displaystyle\int (x^2 + x + 2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$
   Probe: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Rightarrow F'(x) = x^2 + x + 2 = f(x)$

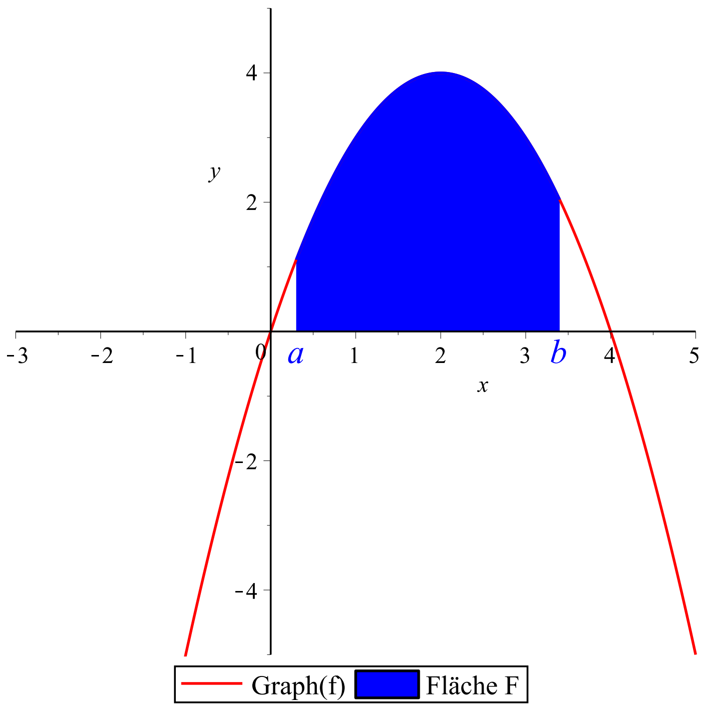
2. $\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + c$
   Probe: $F(x) = \sin(x) \Rightarrow F'(x) = \cos(x) = f(x)$

[24] Die Herkunft der folgenden Namen und Bezeichnungen wird später geklärt!
[25] Als **Probe** muss man nur nachrechnen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

3. $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$
Probe: $F(x) = \cos(x) \Rightarrow F'(x) = -\sin(x) = f(x)$

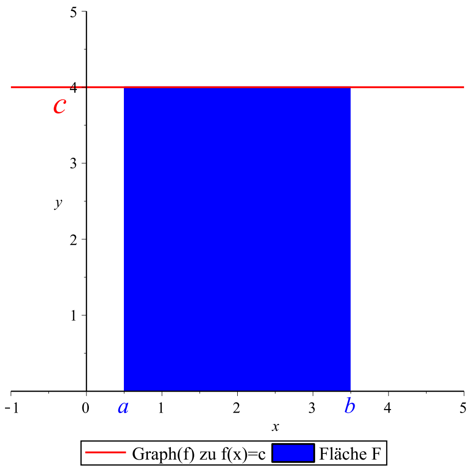
4. $\displaystyle\int \exp(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \exp(x) + c$
Probe: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \exp(x) \Rightarrow F'(x) = \exp(x) = f(x)$

30 Das bestimmte Integral



<u>Ziel</u>: Man will den Flächeninhalt der Fläche F unterhalb des Graphen der Funktion f mit $f(x) \geq 0$ zwischen den Punkten a und b berechnen.

Sei zunächst $f(x) \equiv c, c \geq 0$ eine konstante Funktion.



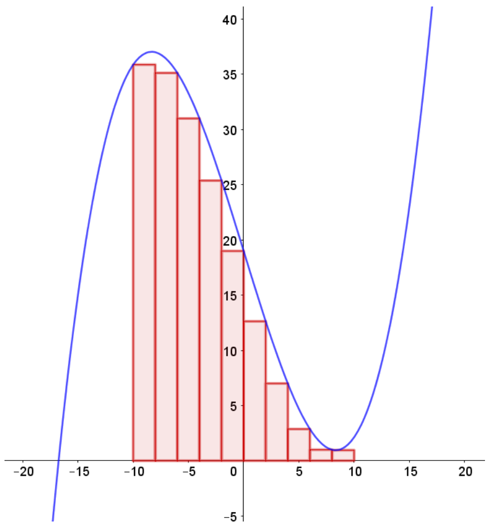
Der Flächeninhalt der Fläche beträgt hier $F = c \cdot (b - a)$.

Der allgemeine Fall soll auf diesen speziellen Fall zurückgeführt werden.

Man bildet dazu eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Intervalls $[a, b]$:

$$\mathcal{Z} \ : \quad x_0 = a \ < \ x_1 \ < \ x_2 \ < \ \dots \ < \ x_{n-1} \ < \ x_n = b$$

und dazu die sognannte **Untersumme** S_u:

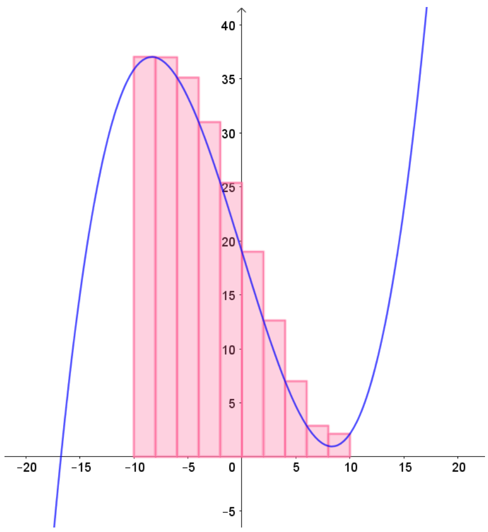


$$S_u(\mathcal{Z}) \ = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{mit} \qquad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]}(f)$$

Für die Fläche F erhält man die Abschätzung

$$F \geq S_u(\mathcal{Z})$$

Ebenso erhält man die **Obersumme** S_o:



$$S_o(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{mit} \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f)$$

Für die Fläche F gilt insgesamt die Abschätzung

$$S_u(\mathcal{Z}) \leq F \leq S_o(\mathcal{Z})$$

Man hofft, dass bei immer feiner werdenden Zerlegungen Unter– und Obersumme sich einander annähern und dabei gegen die Fläche F als gemeinsamen Grenzwert streben.

In der Tat erkennt man sehr leicht, dass für die durch Hinzunahme eines weiteren Punktes aus $\mathcal{Z}$ entstandene feinere Zerlegung

$$\mathcal{Z}^* = (x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, \overset{\downarrow}{x}, x_j, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

gilt:

$$S_u(\mathcal{Z}) \leq S_u(\mathcal{Z}^*) \leq S_o(\mathcal{Z}^*) \leq S_o(\mathcal{Z})$$

D. h. der Abstand zwischen der Untersumme und der Obersumme ist durch die Verfeinerung u. U. geringer geworden.

Für die Untersumme wird die Ungleichung $S_u(\mathcal{Z}) \leq S_u(\mathcal{Z}^*)$ durch die Abbildung 1 deutlich.

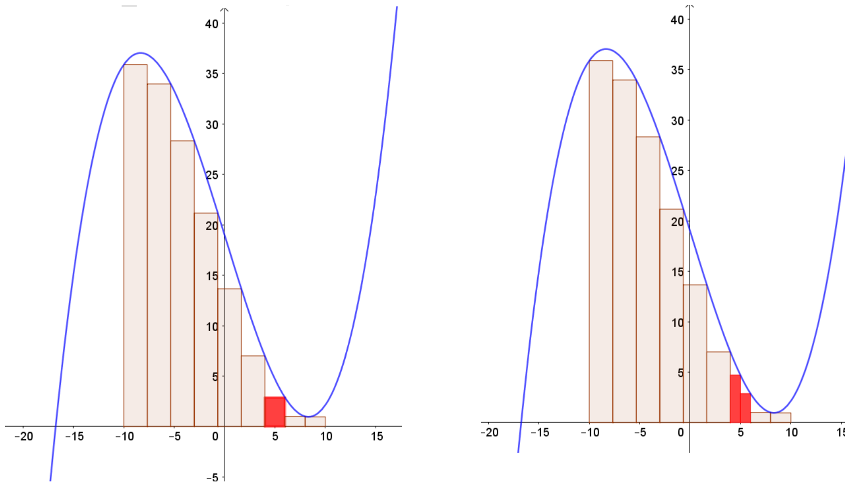
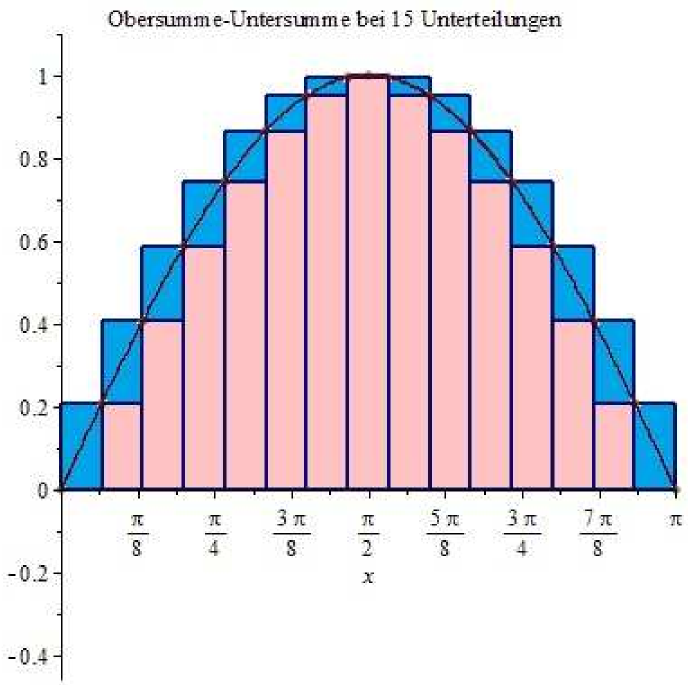
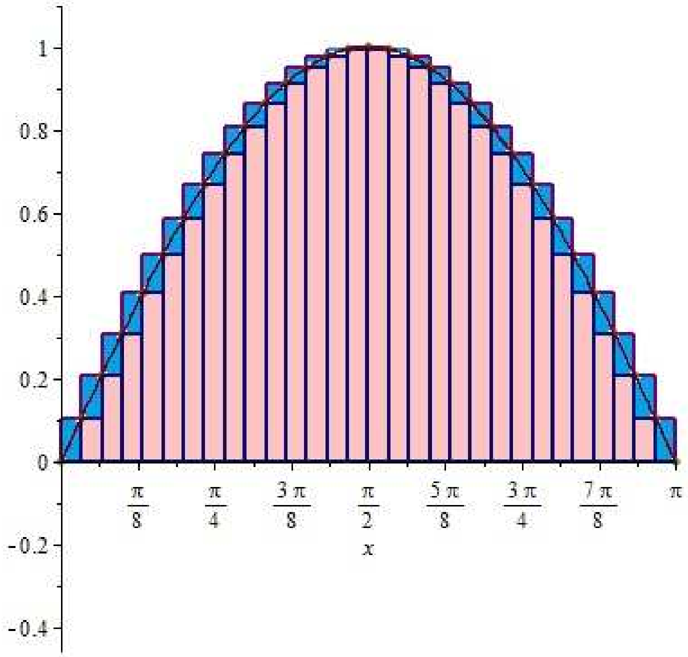


Abbildung 1: Vergrößerung der Untersumme bei Hinzunahme des weitern Zerlegungspunktes x

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen den Annäherungsprozess zwischen Ober- und Untersumme bei der Hinzunahme weiterer Teilpunkte (von n=15 auf n=30 Unterteilungen des Intervalls) am Beispiel von $f(x) = \sin(x)$ mit $a = x_0 = 0$ und $b = x_n = \pi$.





Bei 15 Unterteilungen erhält man die Werte $S_u(\mathcal{Z}) = 1,7844$ und $S_o(\mathcal{Z}) = 1,8935$; bei 30 Unterteilungen erhält man $S_u(\mathcal{Z}) = 2,1029$ und $S_o(\mathcal{Z}) = 2,2021$. Die blau dargestellten Rechtecke repräsentieren die Differenz zwischen Ober- und Untersumme, diese Differenz ist im Fall von 15 Unterteilungen $S_o(\mathcal{Z}) - S_u(\mathcal{Z}) = 0,1091$ und bei 30 Unterteilungen $S_o(\mathcal{Z}) - S_u(\mathcal{Z}) = 0,0992$. Mit wachsender Anzahl der Unterteilungen ist die Differnz also kleiner geworden.

Diese Beobachtung motiviert folgende Definitionen:

Definition:

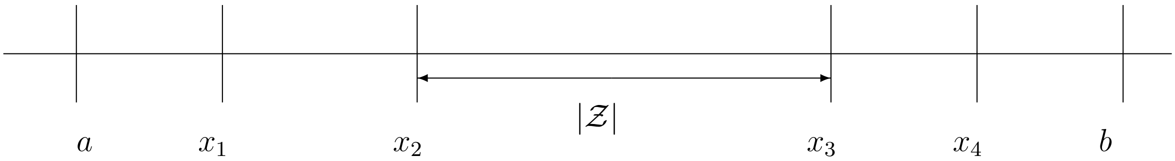
1. Für eine Zerlegung

$$\mathcal{Z} \;:\quad x_0 = a \;<\; x_1 \;<\; x_2 \;<\; \ldots \;<\; x_{n-1} \;<\; x_n = b$$

sei

$$|\mathcal{Z}| \;=\; \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$$

der größte vorkommende Abstand zweier aufeinander folgender Zerlegungspunkte.



2. Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt. f heißt auf $[a, b]$ (Riemann–)**integrabel/integrierbar**, wenn die beiden Grenzwerte

$$F_u = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_u(\mathcal{Z}) \quad \text{und} \quad F_o = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_o(\mathcal{Z})$$

existieren und beide gleich sind (d.h. $\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_o(\mathcal{Z}) - \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_u(\mathcal{Z}) = 0$).
In diesem Fall verwendet man folgende Schreibweise:

$$F_u = F_o = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

das **bestimmte** Integral[26] von f über $[a, b]$.

Beispiel: Sei $I = [a, b]$ mit $0 \leq a < b$, $f(x) = x^2$. Man setze $r = b - a$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Z}_n = (a, a + \frac{1}{n}r, a + \frac{2}{n}r, \ldots, a + \frac{n-1}{n}r, b)$$

Der Grenzwert der Untersummen für $n \longrightarrow \infty$ soll berechnet werden:

$$\begin{aligned}
S_u(\mathcal{Z}_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{n} \cdot f(a + \frac{i-1}{n}r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{n} \cdot \left(a + \frac{i-1}{n}r\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{n} \left(a^2 + 2\frac{i-1}{n}ar + \frac{(i-1)^2}{n^2}r^2\right) \\
& \text{Die Anwendung der Summenformeln } \textstyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \\
& \text{und } \textstyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ liefert:} \\
&= ra^2 + 2ar^2\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{r^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&\to ra^2 + ar^2 + \tfrac{1}{3}r^3 \quad \text{für} \quad n \to \infty \\
&= (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \tfrac{1}{3}(b-a)^3 \quad r = b - a \text{ eingesetzt} \\
&= \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)
\end{aligned}$$

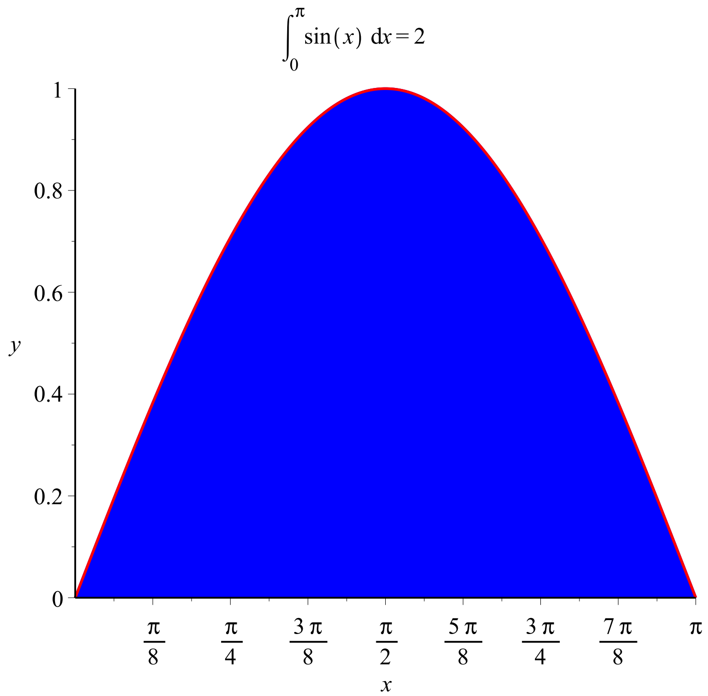
[26] Das Integralzeichen $\int$ ist soll an die Summenbildung bei der Ober- bzw. Untersumme erinnern, daher die Form als „stilisiertes S“

Ebenso folgt: $\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_o(\mathcal{Z}) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$, also gilt insgesamt

$$\int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

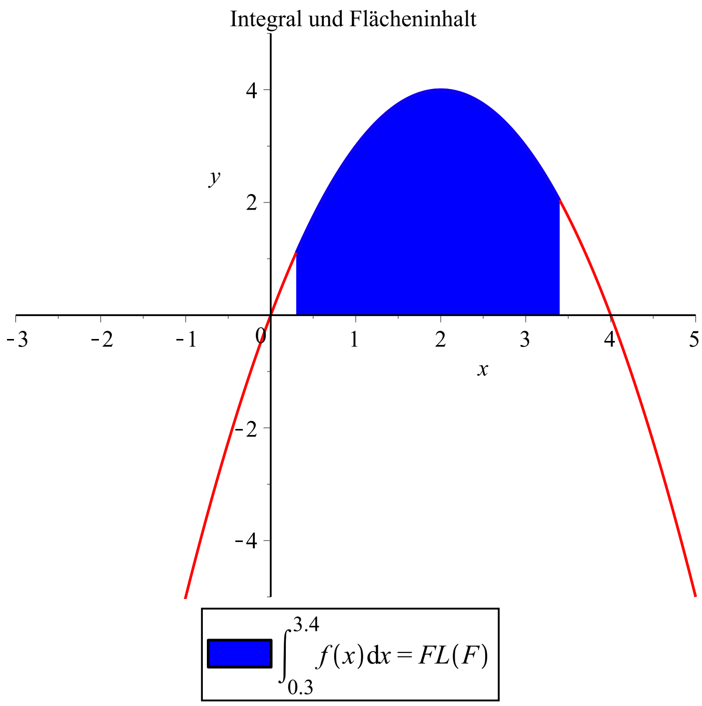
Bemerkung

1. Im Fall der zur Motivation herangezogenen Funktion $f(x) = \sin(x)$ über dem Intervall $[0, \pi]$ gilt:
   $\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_u(\mathcal{Z}) = \lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S_o(\mathcal{Z}) \;=\; 2.$



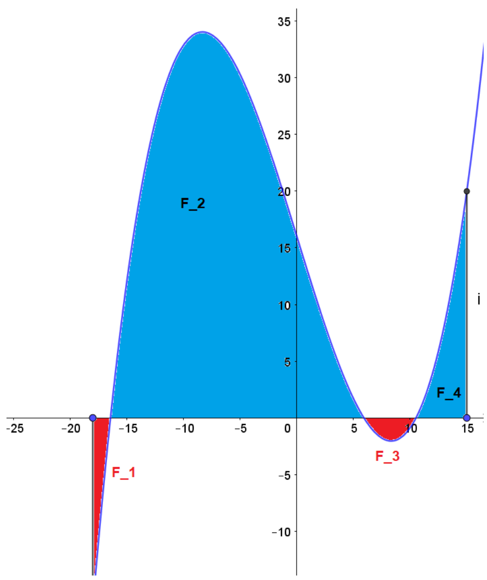
2. Falls $f(x) \geq 0\,\forall x \in [a, b]$ gilt, entspricht der Wert des bestimmten Integrals dem **Flächeninhalt** der Fläche $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$ also $FL(F) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Insbesondere gilt also für die Fläche
   $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, \pi] \wedge 0 \leq y \leq \sin(x)\}$(siehe Bemerkung 1.):
   $FL(F) = \int_0^\pi sin(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 2.$
   Das folgende Bild verdeutlicht den Zusammenhang zwischen (bestimmtem) Integral und Flächeninhalt nochmals:



Bemerkung: Alle bisherigen Überlegungen gelten **auch** für Funktionen, $f(x)$, die sowohl positive - als auch negative Werte annehmen. Die Flächeninhalte der Teilflächen der Bereiche, auf denen $f(x) < 0$ ist, werden negativ gewertet.

Für $F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt $F = -FL(F_1) + FL(F_2) - FL(F_3) + FL(F_4)$.



Neben der Unter- und Obersumme wird ebenfalls häufig die **Zwischensumme** benötigt:

Definition:
Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und

$$\mathcal{Z} \; : \quad x_0 = a \; < \; x_1 \; < \; x_2 \; < \; \ldots \; < \; x_{n-1} \; < \; x_n = b$$

eine Zerlegung von $[a, b]$. Wählt man aus jedem Zerlegungsintervall $[x_{i-1}, x_i]$ einen Punkt $\overline{x}_i$ aus, also

$$\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

so heißt die damit gebildete Summe

$$S_z(\mathcal{Z}) \; = \; \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Zwischensumme zu $f(x)$ und $\mathcal{Z}$.

Satz:
Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrabel; dann gilt

$$\lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} S_z(\mathcal{Z}) \; = \; \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

Bei zunehmender Verfeinerung der Zerlegungen nähern sich auch die Zwischensummen dem bestimmten Integral an.

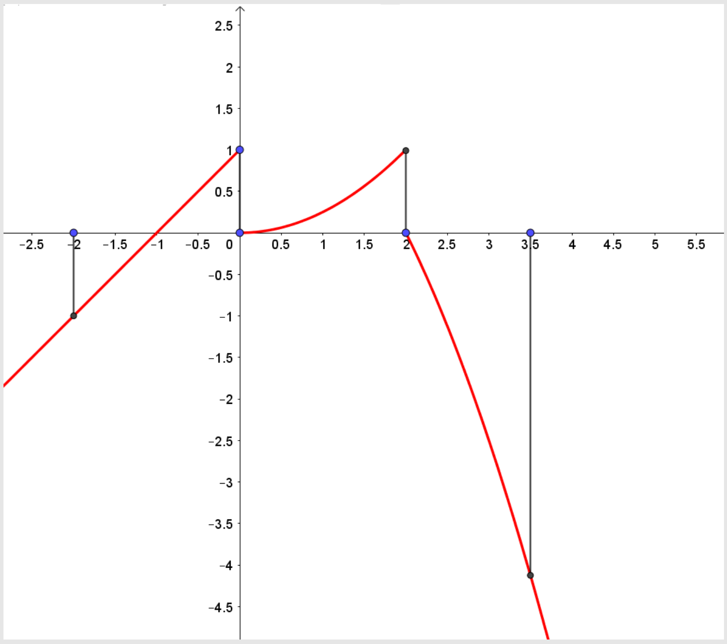
Der folgende Satz, der ohne Beweis angegeben wird, besagt, dass fast alle gängigen Funktionen, die beschränkt sind, über endlichen abgeschlossenen Intervallen integrabel sind.

Satz:
Für eine Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ gilt:

1. Ist $f(x)$ **monoton**, so ist $f(x)$ über $[a, b]$ integrabel.
2. Ist $f(x)$ **stetig**, so ist $f(x)$ über $[a, b]$ integrabel.
3. Ist $f(x)$ stetig bis auf endlich viele endliche Sprungstellen, so ist $f(x)$ über $[a, b]$ integrabel.

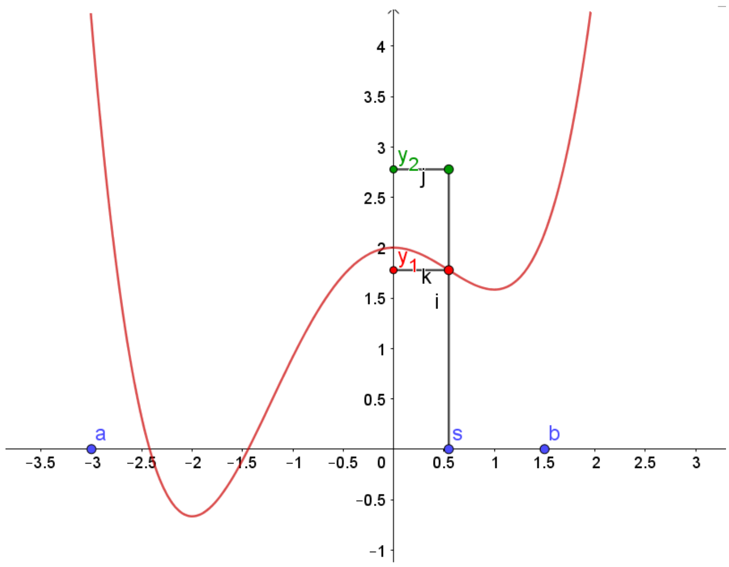
Beispiel:

Gegeben ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$



Es gilt $\int\limits_{-2}^{3.5} f(x)\ dx = \int\limits_{-2}^{0} x\ dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{4}\ dx + \int\limits_{2}^{3.5} (-\frac{x^2}{2} + 2)\ dx$

<u>Satz</u>:
$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei über $[a, b]$ integrierbar. Ändert man die Funktion an endlich vielen Stellen ab, so bleibt die Funktion integrierbar und der Wert des bestimmten Integrals ändert sich nicht.



Beweisidee: An der Stelle $s \in [a,b]$ werde etwa der Funktionswert von y_1 nach y_2 abgeändert. Wählt man nun Zerlegungen $|\mathcal{Z}| \to 0$, so dass s stets ein innerer Punkt eines Zerlegungsintervalls $[x_{i-1}, x_i]$ ist, so betragen die Änderung von Unter- und Obersumme höchstens

$$|\mathcal{Z}| \cdot |y_1 - y_2|$$

Dieser Ausdruck strebt für $|\mathcal{Z}| \to 0$ gegen 0. qed.

Satz:
Die beiden Funktionen $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ seien über $[a,b]$ integrierbar. Dann ist auch die Funktion

$$h(x) \;=\; \alpha \cdot f(x) \,+\, \beta \cdot g(x)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \,+\, \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweisidee: Behandelt wird nur der Fall $\alpha, \beta \geq 0$. Schreibt man für die Untersummen dieser drei Funktionen

$$S_u^f(\mathcal{Z}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} (f)(x_i - x_{i-1})$$

$$S_u^g(\mathcal{Z}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} (g)(x_i - x_{i-1})$$

$$S_u^h(\mathcal{Z}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} (h)(x_i - x_{i-1})$$

und entsprechend $S_o^f(\mathcal{Z})$, $S_o^g(\mathcal{Z})$ sowie $S_o^h(\mathcal{Z})$ für deren Obersummen, so ist offensichtlich

$$\alpha \cdot S_u^f(\mathcal{Z}) \;+\; \beta \cdot S_u^g(\mathcal{Z}) \;\leq\; S_u^h(\mathcal{Z})$$
$$\leq\; S_o^h(\mathcal{Z}) \;\leq\; \alpha \cdot S_o^f(\mathcal{Z}) \;+\; \beta \cdot S_o^g(\mathcal{Z})$$

Die äußere rechte Seite und die äußere linke Seite dieser Ungleichungskette streben wegen der Integrierbarkeit von f und g gegen

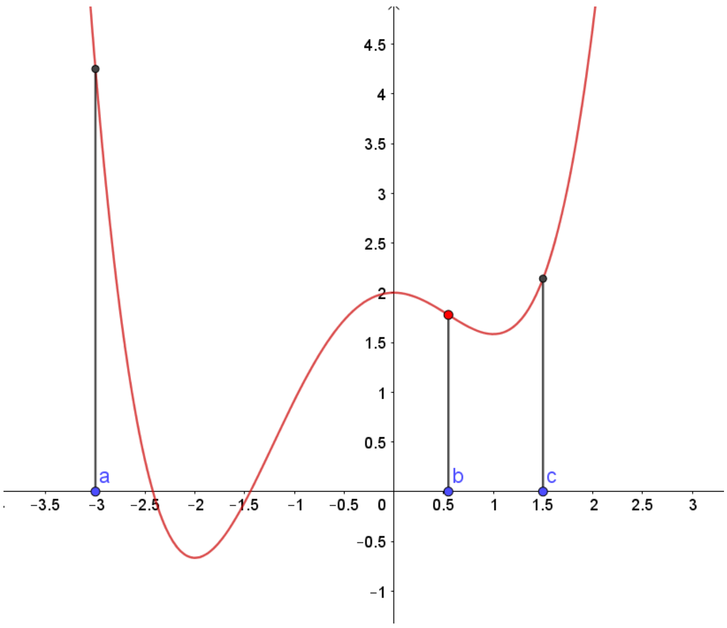
$$\alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \,+\, \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dieses ist dann auch der gemeinsame Grenzwert der Ober- und Untersumme von h. qed.

Satz:
$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ integrierbar. Dann ist f auch auf jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ integrierbar.
Beweisidee: Man wähle α und β als Zerlegungspunkte.

Satz:
Die Funktion $f : [a, c] \mapsto \mathbb{R}$ und ein Punkt $b \in [a, c]$ seien gegeben. Ist dann f über den Intervallen $[a, b]$ und $[b, c]$ integrierbar, so ist f auch über $[a, c]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



Beweisidee: Man betrachte Zerlegungen von $[a, c]$, die b als Teilungspunkt enthalten.

Satz:
Die beiden Funktionen $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ seien über $[a, b]$ integrierbar. Weiter sei $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>Beweisidee</u>: Für die Untersummen $S_u^f(\mathcal{Z})$ und $S_u^g(\mathcal{Z})$ gilt:

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},\, x_i]}(f)(x_i - x_{i-1}) & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},\, x_i]}(g)(x_i - x_{i-1}) & & \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \text{für} \quad |\mathcal{Z}| \to 0 \\
\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x & \leq & \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x & &
\end{array}$$

<u>Satz</u>:
$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei über $[a, b]$ integrierbar. Dann ist auch die Funktion $|f|$ dort integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

<u>Beweisidee</u>: Für die Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$ setze man

$$\begin{array}{rclrcl}
m_i & = & \inf_{[x_{i-1},\, x_i]}(f) & M_i & = & \sup_{[x_{i-1},\, x_i]}(f) \\
\tilde{m}_i & = & \inf_{[x_{i-1},\, x_i]}(|f|) & \tilde{M}_i & = & \sup_{[x_{i-1},\, x_i]}(|f|)
\end{array}$$

Dann gilt

$$\tilde{M}_i - \tilde{m}_i \left\{ \begin{array}{lllll}
= & M_i - m_i & & & \text{falls beide positiv oder negativ sind} \\
\leq & M_i + |m_i| & \leq & M_i - m_i & \text{falls} \quad M_i \geq 0 \geq m_i
\end{array} \right.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
S_o^{|f|}(\mathcal{Z}) - S_u^{|f|}(\mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^{n} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \to 0 \\
& \text{da } f \text{ integrierbar ist}
\end{aligned}$$

Also ist $|f|$ integierbar. Die behauptete Ungleichung der Integrale folgt aus der Ungleichung

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

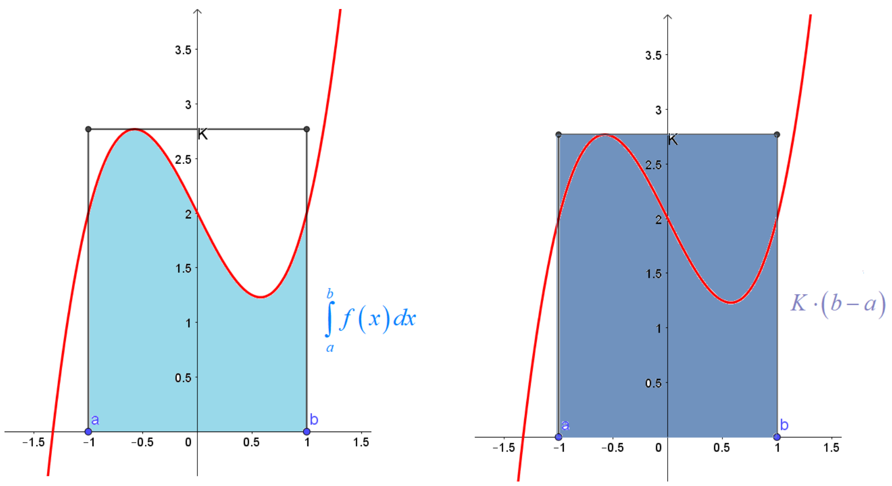
und aus dem vorherigen Satz. qed.

Folgerung: $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei integrierbar. Weiter sei $K \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq K \cdot (b-a)$$

Beweis: Faßt man $x \mapsto K$ als konstante Funktion auf, so ist

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| &\leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b K\,\mathrm{d}x \quad = \quad K \cdot (b-a) \end{aligned}$$



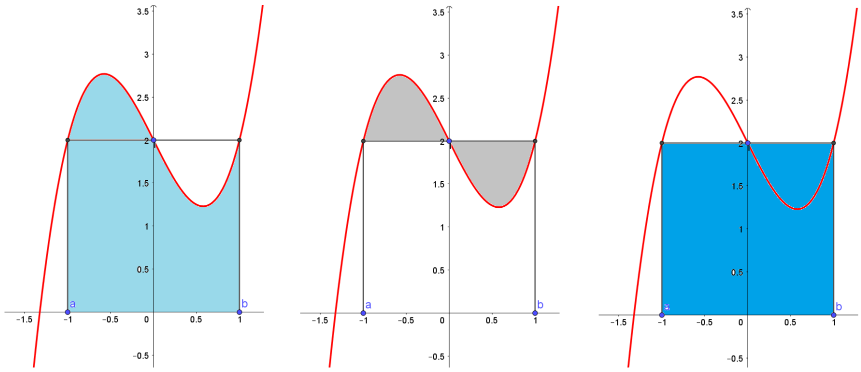
Beispiel: Wegen $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ ist für $0 < a < b$ stets

$$\int_a^b \arctan x\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}(b-a)$$

31 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz: Mittelwertsatz der Integralrechnung
$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig und somit auch integrierbar. Dann gibt es ein $y \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(y) \cdot (b-a)$$



<u>Beweis</u>: Seien $y_1, y_2 \in [a,b]$ mit

$$f(y_1) \;=\; \min_{[a,\,b]}(f) \quad \text{und} \quad f(y_2) \;=\; \max_{[a,\,b]}(f)$$

Faßt man $x \mapsto f(y_1)$ und $x \mapsto f(y_2)$ und als konstante Funktionen auf, so ergibt sich auf Grund vorheriger Sätze

$$\begin{aligned}(b-a)f(y_1) \;&=\; \int_a^b f(y_1)\,\mathrm{d}x \\ &\leq\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq\; \int_a^b f(y_2)\,\mathrm{d}x \;=\; (b-a)f(y_2)\end{aligned}$$

Teilt man diese Ungleichungen durch $(b-a)$, so folgt

$$f(y_1) \;\leq\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; f(y_2)$$

Auf Grund des <u>Zwischenwertsatzes</u> gibt es nun ein $y \in [a,b]$ zwischen y_1 und y_2 mit

$$f(y) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

qed.

<u>Beispiel:</u> $v(t) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ sei die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs. $s(t) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ sei der Aufenthaltsort zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$. Insbesondere sei:

$$\begin{array}{lcl}\text{Aufenthaltsort bei} & t=0: & s_0 = s(0) \\ \text{Aufenthaltsort bei} & t=T: & s_1 = s(T)\end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad s_1 = s_0 + \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$$

Die in der Zeit T zurückgelegte Wegstrecke beträgt $s_1 - s_0$; als Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man

$$\frac{s_1 - s_0}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $t_0 \in [0, T]$ mit

$$v(t_0) = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{s_1 - s_0}{T}$$

Dieses bedeutet: Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird mindestens einmal angenommen.

32 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

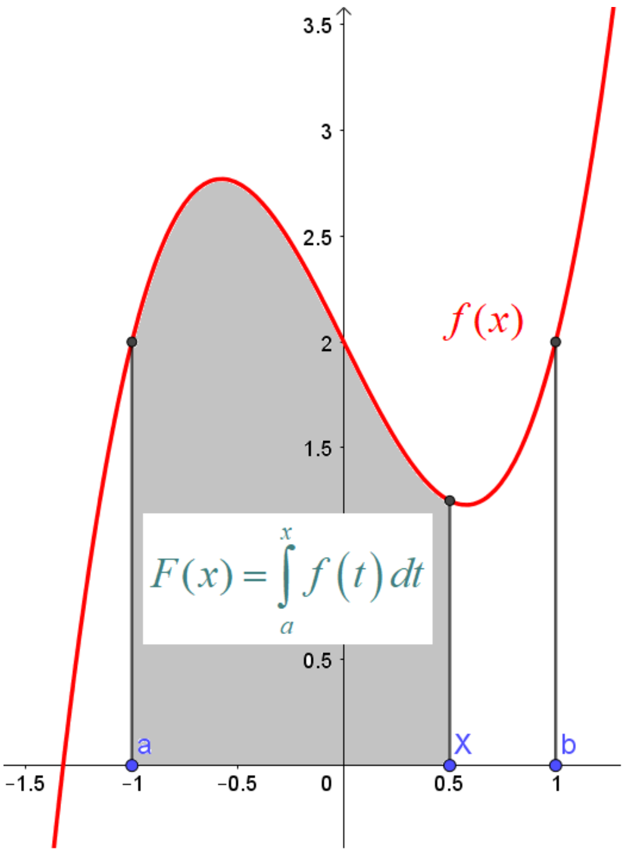
<u>**Definition**</u>:
$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei integrierbar; dann setzt man [27]

$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \; = \; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Für $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrierbar und $x \in [a,b]$ soll das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze betrachtet werden. Man setze

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

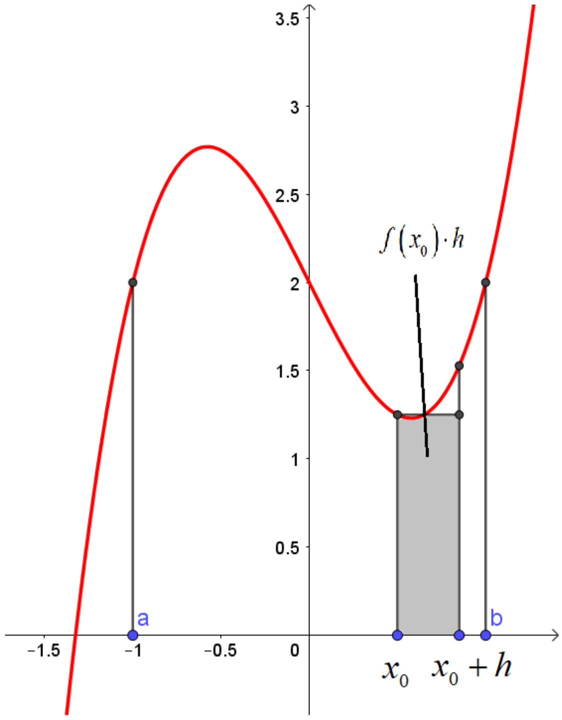
Diese Funktion $F(x)$ heißt **Integralfunktion** zu $f(x)$.



[27] Insbesondere ist $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$, denn $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Die Funktion $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei fortan zusätzlich als stetig vorausgesetzt.

Frage: Ist die Integralfunktion $F(x)$ differenzierbar?



Man betrachte die Veränderung von $x_0 \in [a,b]$ um $h \in \mathbb{R}$, wobei $|h|$ sehr klein ist:

$x_0 \to x_0 + h$ $\quad\Rightarrow\quad$ Veränderung der Fläche um ungefähr $f(x_0) \cdot h$

$\Rightarrow\quad$ Das Wachstum von F beträgt ungefähr $f(x_0)$

Für den Differenzenquotienten von F ergibt sich die Rechnung

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \qquad \text{setze } h = x - x_0$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Aufteilung des Integrationsbereiches $[a, x_0 + h]$ in $[a, x_0]$ und $[x_0, x_0 + h]$

$$= \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

f ist stetig; nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es daher ein $s \in [a,b]$ zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t &= h \cdot f(s) \\ \Rightarrow \quad \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(s) = f(s) \end{aligned}$$

Man lasse nun h gegen 0 streben:

$$\begin{array}{llll} h \longrightarrow 0 & \Rightarrow & s \longrightarrow x_0 & \text{da } s \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x_0+h \text{ liegt} \\ & \Rightarrow & f(s) \longrightarrow f(x_0) & \text{da } f \text{ stetig ist} \end{array}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} &= f(x_0) \\ &= F'(x_0) \end{aligned}$$

Damit wurde bewiesen:

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a,b]$. Dann ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

auf (a,b) differenzierbar, und es ist

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für} \qquad x \in (a,b).$$

Ganz ähnlich zeigt man:

Satz:
Bei einer stetigen Funktion $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

auf ganz $[a,b]$, d. h. insbesondere in den Randpunkten a und b stetig.

Satz:
$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, d. h. die Ableitung $f' : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig. Zusätzlich sei f' in den beiden Randpunkte a und b definiert und dort stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

Beweis: Wendet man den Hauptsatz der Differentialrechnung auf die stetige Funktion f' an, so folgt

$$G(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad G'(x) = f'(x)$$

Man betrachte nun die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= G(x) - f(x) \\ \Rightarrow \quad \varphi'(x) &= f'(x) - f'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Man leite beiden Seiten der Gleichung ab!

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) \equiv c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Siehe die Folgerung aus dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung!

Die Gleichung $\varphi(x) \equiv c$ gilt zunächst nur für die inneren Punkte $x \in [a, b]$; aus Stetigkeitsgründen ist sie auch noch für die Randpunkte a und b richtig.

Zur Bestimmung der Konstanten c setze man $x = a$:

$$\begin{aligned} c &= \varphi(a) &&= G(a) - f(a) \\ &= \int_a^a f'(t)\,\mathrm{d}t - f(a) \\ &= 0 - f(a) &&= -f(a) \end{aligned}$$

Aus $c = -f(a)$ folgt nun

$$\varphi(x) = -f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t - f(x)$$

Man setze nun $x = b$ und addiere auf beiden Seiten dieser Gleichung $f(b)$. qed.

Beispiele:

1. Man betrachte das bestimmte Integral

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$$

Setzt man

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \qquad \text{so ist} \qquad f'(x) = x^2$$

und daher

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

2. Man betrachte nun das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x$$

Setzt man

$$f(x) = -\cos x \qquad \text{so ist} \qquad f'(x) = \sin x$$

und daher

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

Wendet man den obigen Satz auf $f(x)$ statt $f'(x)$ an, so erhält man den
Satz: Fundamentalsatz der Integralrechnung
Die Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

1. Jede Integralfunktion
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$$
mit einem $x_0 \in [a, b]$ ist eine Stammfunktion von f.

2. Sei umgekehrt eine Stammfunktion $F(x)$ von f gegeben (d. h. eine Funktion F mit $F' = f$); dann läßt sich für beliebige $\alpha, \beta \in [a, b]$ das zugehörige bestimmte Integral durch
$$\int_\alpha^\beta f(t) \, \mathrm{d}t = F(\beta) - F(\alpha)$$
berechnen. Schreibweise:
$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(t) \, \mathrm{d}t &= F(\beta) - F(\alpha) \\ &= F(x)|_\alpha^\beta = [F(x)]_\alpha^\beta \end{aligned}$$

Bemerkung: Dieses ist die **Rechtfertigung der Bezeichnung**

$$\int f(t) \, \mathrm{d}t = F(x) + \mathbf{const}$$

für eine allgemeine Stammfunktion. Man beachte, dass die additive Konstante, um die sich zwei Stammfunktionen unterscheiden, bei der Berechnung eines bestimmten Integrals keine Rolle spielt.

Die Bestimmung eines bestimmten Integrals mit stetigem Integranden f kann dadurch erfolgen, dass man eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ sucht:

Man hat dann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Eine Stammfunktion findet man z.B. über eine entsprechende Tabelle oder mittels der im Folgenden dargestellten **Integrationsmethoden**.

33 Integrationsmethoden

Zur Berechnung bestimmter und unbestimmter Integrale beschreitet man den durch den Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung gewiesenen Weg: Man sucht eine Stammfunktion des Integranden (d. h. der zu integrierenden Funktion); das bedeutet: zum gegebenen Integranden $f(x)$ versucht man, eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ zu finden.

In einzelnen Fällen mag man zu $f(x)$ sehr schnell ein geeignetes $F(x)$ erkennen; in den meisten Fällen ist das aber nicht so einfach! So findet man beispielsweise zu der Funktion

$$f(x) \;=\; x\,\cos x$$

nicht so leicht auf den ersten Blick die Stammfunktion[28]

$$F(x) \;=\; x\,\sin x \,+\, \cos x$$

Zur Erleichterung und Systematisierung der Suche nach der Stammfunktion dienen die im Folgenden dargestellten Integrationsmethoden bzw. Integrationsregeln.

Das Prinzip der Integrationsregeln erinnert an die entsprechenden Methoden zum Nachweis von Stetigkeit oder Differenzierbarkeit: Man versucht, den Integranden als eine Funktion aufzufassen, die aus einfachen Grundfunktionen aufgebaut ist. Kennt man die Stammfunktionen der Grundfunktionen, so helfen die Integrationsregeln, daraus eine Stammfunktion der gegebenen Funktion zu bilden.

Notwendig ist dabei natürlich, dass die Stammfunktionen der Grundfunktionen bekannt sind. Einige der wichtigsten seinen hier noch mal erwähnt:[29]

$$\int x^r\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1} + c \qquad \text{für } r \in \mathbb{Q}\,,\; r \neq -1$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x \;=\; -\cos x + c \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x \;=\; \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \arctan x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \arcsin x + c$$

[28] Übung: Prüfen Sie hier $F'(x) = f(x)$ durch ableiten nach!

[29] Eine ausführliche Tabelle stand auf Seite 210.

Die folgenden Regeln zur Integration sind aus Summen-, Produkt- und Kettenregel der Differentiation gewonnen. Ihre Formulierung und Herleitung ist recht einfach. Schwieriger ist jedoch zu erkennen, wann und wie man sie anwendet. Dieses erfordert einige Übung und Erfahrung sowie die Betrachtung einschlägiger Beispiele. Häufig muß vor Anwendung einer der Regeln zunächst der Integrand geschickt umgeformt werden.

Noch relativ einfach zu handhaben ist die **Summenregel**:

Satz:
Die Funktionen $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ seien stetig mit Stammfunktionen F und G; weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x) \quad \text{Stammfunktion von} \quad \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$$

Beweis: Man prüft nach, dass die Ableitung von $\alpha \cdot F + \beta \cdot G$ tatsächlich $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ ist:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x))' &= \alpha \cdot F'(x) + \beta \cdot G'(x) \\ &= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \end{aligned}$$

qed.

Beispiel:

$$\int_0^\pi (4x^3 + \sin x)\,\mathrm{d}x$$

Von den beiden Summanden kennt man jeweils eine Stammfunktion, nämlich $F_1(x) = x^4$ und $F_2(x) = -\cos x$; damit berechnet man:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (4x^3 + \sin x)\,\mathrm{d}x &= (x^4 - \cos x)\big|_0^\pi \\ &= (\pi^4 - \cos \pi) - (0^4 - \cos 0) \\ &= (\pi^4 - (-1)) - (0 - 1) \\ &= \pi^4 + 2 \approx 100 \end{aligned}$$

33.1 Partielle Integration/Produktintegration

Schon etwas schwieriger anzuwenden ist die aus der Produktregel gewonnene **Regel der Partiellen Integration/Produktintegration**:

Satz: Partielle Integration/Produktintegration
Für stetig differenzierbare Funktionen $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ ist

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

Beweis: Durch Differenzieren prüft man nach, dass beide Seiten der behaupteten Gleichung Stammfunktion derselben Funktion sind:

$$\begin{aligned}
\left(f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)' &= (f(x)g(x))' - \left(\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right)' \\
&\quad \text{Produktregel!} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) \\
&= f'(x)g(x) \\
&= \left(\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)'
\end{aligned}$$

qed.

Für bestimmte Integrale lautet die Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{30}$$

Will man die Partielle Integration/Produktintegration anwenden, so muß man den Integranden dergestalt als Produkt zweier Faktoren darstellen, dass man von einem der beiden Faktoren eine Stammfunktion kennt, d. h. dass man einen Faktor als Ableitung einer anderen Funktion schreiben kann. Von welchem der beiden Faktoren man eine Stammfunktion sucht, muß man in jedem Einzelfall entscheiden. Ziel bei der Anwendung der Regel ist natürlich, dass das Integral auf der rechten Seite der Formel 29 bzw. der Formel 30 „einfacher“ als das ursprüngliche Integral wird.

Beispiel:

1) Wir betrachten folgendes Integral

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x$$

Hier findet man von den beiden Faktoren sofort Stammfunktionen: $(\frac{1}{2}x^2)' = x$ und $\sin' x = \cos x$. Die Verwendung von $\sin' x = \cos x$ bietet sich an, da man dann wegen $(x)' = 1$ bei dem Integral auf der rechten Seite eine echte Vereinfachung erhält:

$$\begin{aligned}
\int x \cos x \,\mathrm{d}x &= \int x \sin' x \,\mathrm{d}x \qquad \text{nun Partielle Integration!} \\
&= x \sin x - \int (x)' \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= x \sin x + \cos x + c
\end{aligned}$$

Mitunter sollte man den Integranden zunächst geeignet umformen, um die Partielle Integration anwenden zu können.

2) In dem Integral

$$\int_a^b \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

schreibe man den Integranden in der Form $-\sin x \cdot (-\sin x)$; dann führt die Partielle Integration mit $\cos' x = -\sin x$ zum Erfolg:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= -\int_a^b \sin x (-\sin x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b \sin x \cos' x \,\mathrm{d}x \qquad \text{nun Partielle Integration!} \\
&= (-\sin x \cos x)\big|_a^b + \int_a^b \sin' x \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= (-\sin x \cos x)\big|_a^b + \int_a^b \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
& \text{Verwende } \cos^2 x + \sin^2 x = 1\ ! \\
&= (-\sin x \cos x)\big|_a^b + \int_a^b (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= (-\sin x \cos x)\big|_a^b + \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x}_{=b-a} - \int_a^b \sin^2 x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Bringt man den letzten Summanden der rechten Seite auf die andere Seite und teilt man die gesamte Gleichung durch 2, so erhält man

$$\int_a^b \sin^2 x \, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\left(b - a \;-\; (\sin x \cos x)\big|_a^b\right)$$

bzw. als unbestimmtes Integral:

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\,(x \;-\; \sin x \cos x) \;+\; c$$

3) Noch „trickreicher“ geht man bei dem Integral

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

vor: Man ergänzt den Integranden um den Faktor $1 = (x)'$:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, \mathrm{d}x \;&=\; \int 1 \cdot \arcsin x \, \mathrm{d}x \\ &=\; \int (x)' \cdot \arcsin x \, \mathrm{d}x \\ &=\; x \cdot \arcsin x \;-\; \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Der Integrand $x/\sqrt{1-x^2}$ besitzt die Stammfunktion $F(x) = -\sqrt{1-x^2}$, also

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \;=\; -\sqrt{1-x^2} \;+\; c \tag{31}$$

Damit folgt schließlich, wenn man dieses oben einsetzt:

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x \;=\; x \cdot \arcsin x \;+\; \sqrt{1-x^2} \;+\; c$$

33.2 Integration durch Substitution

Die Gleichung 31 läßt sich ohne weitere Hilfsmittel nicht so leicht finden. Man kann sie natürlich leicht nachprüfen, indem man die Kettenregel der Differentialrechnung verwendet.

Zum Herleiten bzw. Finden einer Gleichung wie 31 bietet sich eine Regel an, die aus der Kettenregel folgt und ein wesentliches Hilfsmittel zur Integration darstellt, die sogenannte **Substitutionsregel**[30]

Man geht von einer Funktion $f(y)$ mit bekannter Stammfunktion $F(y)$ aus:

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y \quad = \quad F(y) + c$$

Ist eine weitere Funktion $y = g(x)$ gegeben, so gilt nach der Kettenregel:

$$(F(g(x)))' \;=\; F'(g(x)) \cdot g'(x) \;=\; f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Das heißt: Die Funktion $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ hat als Stammfunktion die Funktion $H(x) = F(g(x))$; dieses ist genau die Substitutionsregel für unbestimmte Integrale:

Satz: (Substitutionsregel für unbestimmte Integrale)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(g(x)) + c \qquad \text{mit } F'(y) = f(y)$$

$$\text{bzw.:} \qquad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{mit } y = g(x)$$

Um die Substitutionsregel anwenden zu können, muß man erkennen, dass der Integrand dem folgenden Muster genügt:

- Der Integrand läßt sich als Produkt zweier Faktoren schreiben.
- Der eine Faktor besteht aus einer äußeren Funktion $f(y)$, in die eine innere Funktion $y = g(x)$ eingesetzt ist.
- Der andere Faktor ist die Ableitung $g'(x)$ der inneren Funktion $g(x)$.

Es ist nicht immer auf Anhieb klar, welcher Teil des Integranden welche Rolle annimmt. Ziemlich offensichtlich ist das noch in dem folgenden

Beispiel:

[30]Die Substitutionsregel entspricht einer **„Umkehrung“ der Kettenregel der Differentialrechnung**

1) Zunächst betrachten wir:

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Diesen Integranden kann man in der Form

$$f(g(x)) \cdot g'(x)$$

schreiben, indem man setzt bzw. verwendet:

- als äußere Funktion $f = \frac{1}{y^2}$,
- als innere Funktion $g(x) = 1 + x^2$.
- Die Ableitung der inneren Funkton ist $g'(x) = 2x$.

Eine Stammfunktion der äußeren Funktion ist $F(y) = -1/y$. Damit liefert die Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{y} + c \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + c \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei für y wieder $y = g(x) = 1 + x^2$ eingesetzt.

2) Ein weiteres Beispiel ist

$$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x}}$$

Bei diesem Integral erkennt man auch recht schnell: $f(y) = 1/\sqrt{y}$ sowie $y = g(x) = 1 + \sin x$ und $g'(x) = \cos x$, und man kann berechnen:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin x}} && \text{setze} \quad \begin{aligned} y=g(x) &= 1+\sin x \\ g'(x) &= \cos x \end{aligned} \\ &= \int \frac{g'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{g(x)}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} && \text{Substitutions-regel} \\ &= 2\sqrt{y} + c = 2\sqrt{1+\sin x} + c && y = 1+\sin x \text{ eingesetzt} \end{aligned}$$

3) Mitunter muß der Integrand vor der Anwendung der Substitutionsregel geeignet umgeformt werden; ein Beispiel dafür ist das Integral 31 auf Seite 238:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Als innere Funktion bietet sich

$$y \;=\; g(x) \;=\; 1-x^2$$

an. Durch Erweitern mit -2 bekommt man deren Ableitung $-2x$, und man kann berechnen:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{setze} \quad \begin{aligned} y = g(x) &= 1-x^2 \\ g'(x) &= -2x \end{aligned}$$

$$= \; -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \; -\frac{1}{2}\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \; -\frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y \qquad \text{Substitutions-regel}$$

$$= \; -\sqrt{y}+c \;=\; -\sqrt{1-x^2}+c \qquad y = 1-x^2 \text{ eingesetzt}$$

4) Schon etwas komplizierter ist das Integral

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Als innere Funktion bietet sich

$$y \;=\; g(x) \;=\; \sqrt{x}$$

an. Man kann sich deren Ableitung

$$y' \;=\; g'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

verschaffen, indem man mit $2\sqrt{x}$ erweitert:

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int \sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Als äußere Funktion nimmt man $f(y) = y \cdot \sin y$; die Substitution $y = g(x) = \sqrt{x}$ liefert dann

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int y \cdot \sin y\,\mathrm{d}y$$

Ein ähnliches Integral wie dieses hatten wir bereits mit Partieller Integration berechnet; als Endergebnis erhält man

$$\begin{aligned}\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;&=\; -2y \cdot \cos y \,+\, 2\sin y \,+\, c \\ &=\; -2\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \,+\, 2\sin\sqrt{x} \,+\, c\end{aligned}$$

Unbedingt merken sollte man sich die beiden folgenden einfachen Anwendungen der Substitutionsregel: für eine stetige Funktion $f(x)$ mit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) \,+\, c$$

und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ ist

$$\int f(a \cdot x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}F(a \cdot x) \,+\, c$$

$$\int f(x+b)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x+b) \,+\, c$$

Beim ersten der beiden Integrale erhält man die Ableitung a der inneren Funktion $y = g(x) = a \cdot x$ durch Erweitern mit a; beim zweiten Integral ist die Ableitung der inneren Funktion $y = g(x+b)$ gleich 1.

Ein gemeinsames Beispiel für beide Gleichungen ist

$$\int \sin(\omega x + \delta)\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \delta) \,+\, c$$

Vorhanden ist auch eine Version der Substitutionsregel, die zur direkten Berechnung bestimmter Integrale geeignet ist:

Satz: (Substitutionsregel für bestimmte Integrale)
Gegeben seien zwei abgeschlossene Intervalle

$$[a, b],\ [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}\ ,$$

eine stetige Funktion

$$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

und eine stetig differenzierbare und bijektive Funktion

$$g : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$$

Seien weiter $y_1, y_2 \in [a, b]$ und $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ mit

$$g(x_1) = y_1 \quad \text{und} \quad g(x_2) = y_2$$

Dann gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{x_1}^{x_2} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Sei $F(y)$ eine Stammfunktion von $f(y)$, d. h. es sei $F' = f$. Mit Hilfe der Kettenregel rechnet man nach, dass dann

$$(F \circ g)(x) \;=\; F(g(x))$$

eine Stammfunktion der Funktion $f(g(x))g'(x)$ ist:

$$F(g(x))' \;=\; F'(g(x)) \cdot g'(x) \;=\; f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Damit erhält man

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} f(y)\,\mathrm{d}y &=& F(y_2) - F(y_1) & \text{Einsetzen von } y_1 = g(x_1) \text{ und } y_2 = g(x_2)! \\ &=& F(g(x_2)) - F(g(x_1)) & F \circ g \text{ ist Stammfunktion von } f(g(x))g'(x) \\ &=& \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}y & \end{array}$$

qed.

Bemerkung: Besonders zu achten ist hierbei auf die richtige Umwandlung der Grenzen:

- Die Integration der äußeren Funktion $f(y)$ erfolgt zwischen den beiden y–Werten y_1 und y_2.
- Die Integration von $f(g(x)) \cdot g'(x)$ erfolgt zwischen den beiden zugehörigen x–Werten $x_1 = g^{-1}(y_1)$ und $x_2 = g^{-1}(y_2)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{setze} \quad \begin{aligned} y &= g(x) &&= \cos x \\ y' &= g'(x) &&= -\sin x \\ y_1 &= \cos x_1 = \cos 0 &&= 1 \\ y_2 &= \cos x_2 = \cos \tfrac{\pi}{4} &&= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \\
&= -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\
&= \left.\frac{1}{y}\right|_1^{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

Man kann natürlich auch zunächst das zugehörige unbstimmte Integral ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{setze} \quad \begin{aligned} y &= g(x) = \cos x \\ y' &= g'(x) = -\sin x \end{aligned} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\
&= \frac{1}{y} + c = \frac{1}{\cos x} + c
\end{aligned}$$

und anschließend die gewonnene Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\cos x}$ zur Berechnung des ursprünglichen bestimmten Integrals verwenden:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{\cos x}\right|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

Der zweite Lösungsweg besitzt den Vorteil, dass man sich um die Umwandlung der Grenzen nicht zu kümmern braucht.

Es gibt auch Fälle, bei denen man zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

den umgekehrten Weg beschreibt: man wendet die Substitutionsregel „rückwärts“ an,

d. h. man erhält ein „einfacheres“ Integral, indem man für die Integrationsvariable x eine geeignete innere Funktion $x = g(t)$ einsetzt; man muß dann nur darauf achten, dass man die Grenzen richtig umwandelt, indem man dort die t–Werte

$$t_1 = g^{-1}(x_1) \quad \text{und} \quad t_2 = g^{-1}(x_2)$$

einsetzt. Dieses ergibt dann

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Beispiel Berechnung der Fläche eines Viertelkreises
Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass die Fläche unterhalb des Schaubildes der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

zwischen den Punkten 0 und 1 genau die Fläche V eines Viertels des Einheitskreises beträgt. Zu berechnen ist also

$$V = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Man führe die folgende Substitution durch

	$x(t)=\cos t$	$x'(t)=-\sin t$
Umwandlung der Grenzen:	$1=\cos 0$	$0=\cos\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\cos\frac{\pi}{2}}^{\cos 0} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x && \text{Ausführen der Substitution!}\\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{=\sin t}(-\sin t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t && \text{Vertauschung der Grenzen} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}\\
&= \frac{1}{2}\,(t - \sin t\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} && \text{Siehe das Beispiel auf Seite 237!}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - (\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin 0\cos 0)\right)\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Die Fläche des vollen Einkeitskreises beträgt somit $4V = \pi$.

34 Fortsetzung Integrationsmethoden

34.1 Integration durch Substitution

Wir geben zunächst noch einige Beispiele zur Integration durch Substitution, um die verschiedenen „Sichten“ dieses Verfahrens zu üben:

34.1.1 „passive“ Substitution

Hat der Integrand die Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ oder ist er durch Multiplikation mit einer reellen Zahl in diese Form überführbar, liefert

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

folgende (pragmatische) Regel: Man ignoriert g(x) und sucht die Stammfunktion F(x) von f(x); dann setzt man g(x) in F ein.

1.1

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x\ dx = \frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + c$$

$g(x) = 1 + x^2$

$g'(x) = 2x$

$f(x) = \sqrt{x} \leftarrow F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \Rightarrow F(g(x)) = \frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$

1.2

$$\int \sin(3x+4)dx = \int \frac{1}{3}\sin(3x+4)\cdot 3\ dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+4)\cdot 3\ dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x+4))+c$$

$g(x) = 3x + 4$

$g'(x) = 3$

$f(x) = \sin(x) \leftarrow F(x) = -\cos(x)$

$\Rightarrow F(g(x)) = -\frac{1}{3}\cos(3x+4)$

1.3

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int (\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + c$$

$g(x) = \ln(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x \text{ denn } f(g(x)) = g(x) = \ln(x) \leftarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow F(g(x)) = \tfrac{1}{2}(\ln(x))^2$$

1.4

$$\int \sin^n(x)\cdot\cos(x)dx = \int(\sin(x))^n\cdot\cos(x)dx = \frac{(\sin(x))^{n+1}}{n+1}+c = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}+c$$

$$g(x) = \sin(x)$$
$$g'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = x^n \leftarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \Rightarrow F(g(x)) = \tfrac{(\sin(x))^{n+1}}{n+1}$$

34.1.2 „aktive“ Substitution

$$\int f(g(t))\cdot g'(t)dt = F(\overbrace{g(t)}^{=x})+c = F(x)+c = \int f(x)dx$$

oder von rechts nach links gelesen:

setzt man $x = g(t)$ so gilt:

$$\int f(x)dx = \int \overbrace{f(g(t))\cdot g'(t)}^{=h(t)}\,dt = \int h(t)dt = H(t)+c$$

$$\underbrace{=}_{\text{Rücksubstitution}} \quad H(g^{-1}(x))+c$$

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}$$

Zur Lösung von $\int f(x)dx$ sucht man also eine Substitution $x = g(t)$ und löst $\int f(g(t))g'(t)dt$; man „ersetzt“ also x durch $g(t)$ und dx durch $g'(t)dt$!
Dies ist nur sinnvoll, wenn der formal kompliziert aussehende Ausdruck $f(g(t))\cdot g'(t)$ in

Wirklichkeit einfacher zu integrieren ist als $f(x)$.

Beispiele:

1)

$$\int \frac{\sin(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \quad = \quad \int \frac{\sin(t)}{\cancel{t-1}} \cdot 2\cancel{(t-1)}dt = \int \overbrace{2\sin(t)}^{=h(t)}dt$$

$\uparrow$

$1+\sqrt{x}$ in $\sin(\ldots)$ „stört“
daher: $t = 1+\sqrt{x}$
also $x = g(t) = (t-1)^2$
$\frac{dx}{dt} = g'(t) = 2\cdot(t-1)$
und $\sqrt{x} = t-1$

$$= 2\int \sin(t)dt$$

$$= \underbrace{-2\cos(t)+c}_{H(t)+c}$$

$$\underbrace{=}_{\uparrow\text{Rücksubstitution}} \quad H(1+\sqrt{x})+c$$

$$= -2\cos(1+\sqrt{x})+c$$

Man überlegt also eher umgekehrt: Wie soll die neue Variable t in Abhängigkeit von der alten Variablen aussehen und berechnet dann $x = g(t)$ und $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

$f(g(t))\cdot g'(t) = h(t)$ ist eine Hilfsfunktion abhängig von t; man berechnet deren Stammfunktion H(t) und muss dann noch die <u>Rücksubstitution</u> $t = g^{-1}(x)$ vornehmen.

$\boxed{\text{Formal entspricht das also:}}$

$$\int f(x)dx = \int \overbrace{f(g(t))\cdot g'(t)}^{=h(t)}dt = \int h(t)dt$$

$$= H(t)+c$$

$$= H(g^{-1}(x))+c$$

2) Manchmal braucht man mehr als eine Methode, z.B.

$$\int \sqrt{x}\cdot\ln(x)dx = \int t\cdot\ln(t^2)\cdot 2tdt$$

<u>Substitution:</u> $t = \sqrt{x}$

$x = g(t) = t^2, \quad \frac{dx}{dt} = g'(t) = 2t$

$$2\int t^2 \cdot \ln(t^2)dt$$

$\underline{\textit{Produktintegration}} \;=\; 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3}\ln(t^2) - \int \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot 2t\ dt\right]$

$= \frac{2}{3}t^3 \ln(t^2) - \frac{4}{3}\int t^2\ dt$

$= \frac{2}{3}t^3 \ln(t^2) - \frac{4}{9}t^3 + c$

$\underline{\text{Rücksubstitution } (t = \sqrt{x}) :}\; = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 \cdot \ln(x) - \frac{4}{9} \cdot x \cdot \sqrt{x} + c$

$= \frac{2}{3}x \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(x) - \frac{4}{9}x \cdot \sqrt{x} + c$

3)

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$x = t^2, \quad g(t) = t^2, \quad g'(t) = 2t$$

$$\int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(4)} \frac{1}{1+t} \cdot 2t\ dt$$

$0 = g(0) \Rightarrow g^{-1}(0) = 0$

$4 = g(2) \Rightarrow g^{-1}(4) = 2$

$$= 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}\ dt$$

$$= 2\int_0^2 \frac{1+t-1}{1+t}\ dt$$

$$= 2\int_0^2 \left[1 - \frac{1}{1+t}\right]\ dt$$

$$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_{t=0}^{t=2}$$

$$(\ln(1) = 0) \rightarrow \qquad = 4 - 2\ln(3)$$

34.2 Integration gebrochen rationaler Funktionen

34.2.1 Partialbruchzerlegung

Zunächst benötigen wir einige Tatsachen über (gebrochen) rationale Funktionen und Polynome, wir zitieren aus den Ergebnissen des 4. Tags:

Bemerkung: Jede gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ hat eine Darstellung

$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit einem Polynom $s(x)$ und einer echt gebrochen rationalen Funktion $\frac{r(x)}{q(x)}$, d. h. mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(q)$.

Begründung: Dieses folgt aus der Polynomdivision mit Rest Sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ gegeben, wobei $q(x)$ nicht das Nullpolynom ist, so gibt es dazu zwei Polynome $r(x)$ und $s(x)$ mit

$$\begin{aligned} & \text{grad}(r) < \text{grad}(q) \\ \text{und} \quad & p(x) = s(x)q(x) + r(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teilt man beide Seiten der letzten Gleichung durch $q(x)$, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{s(x)q(x) + r(x)}{q(x)} \\ &= \frac{s(x)q(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} \\ &= s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist dabei wegen $\text{grad}(r) < \text{grad}(q)$ eine echt gebrochen rationale Funktion.

Zur Zerlegung des Nennerpolynoms $q(x)$ in $f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ benötigen wir den

Satz: (Fundamentalsatz der Algebra, reelle Schreibweise) Sei $q(x)$ ein Polynom n-ten Grades. Dann gibt es

$$x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{R} \quad \text{und Polynome} \quad g_1(x), \ldots, g_k(x)$$

mit $\mathrm{grad}(g_i(x)) = 2$ und $g_i(x)$ ohne Nullstelle für $i = 1, \ldots, k$, so dass

$$q(x) \;=\; (x - x_1) \cdots (x - x_l) \cdot g_1(x) g_2(x) \cdots g_k(x).$$

ist.
Mit dem Fundamentalsatz der Algebra erhält man dafür

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{(x - x_1) \cdots (x - x_l) \cdot g_1(x) g_2(x) \cdots g_k(x)}$$

Dabei können die auftretenden Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_l \in \mathbb{R}$ mehrfache Nullstellen des Polynoms $q(x)$ sein!

Die **Partialbruchzerlegung**[31] garantiert nun:

Es gibt reelle Konstanten A_i, B_j und C_j sowie natürliche Zahlen m, k, $\tilde{k}$, $\tilde{l}$, so dass folgende Darstellung gilt

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{(x - x_i)^k} + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \frac{B_j \cdot x + D_j}{(g_j(x))^{\tilde{k}}}$$

34.2.2 Anwendung der Partialbruchzerlegung zur Integration (gebrochen) rationaler Funktionen

Für die Integration einer (gebrochen) rationalen Funktion erhält man damit:

$$\int f(x)dx = \int s(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

Die Integration des Polynoms $s(x)$ ist einfach, es bleibt also die Integration des **echt gebrochen rationalen Anteils** $\frac{r(x)}{q(x)}$ also

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Mit der **Partialbruchzerlegung** erhält man dafür

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}dx = \int \frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \int \frac{A_i}{(x - x_i)^k}dx + \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int \frac{B_j \cdot x + D_j}{(g_j(x))^{\tilde{k}}}dx$$

Dabei haben die Nennerpolynome $g_j(x)$ die Form $g_j(x) = a_j + b_j x + x^2$ ohne reelle Nullstelle!

[31] Auf einen exakten Beweis wird hier verzichtet

Wir sehen also:
Auf Grund der Partialbruchzerlegung ist eine gebrochen rationale Funktion eine **Summe von Funktionen** der folgenden Typen:

1. ein Polynom s(x)
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad k > 0$ a ist k-fache Nullstelle
3. $\dfrac{Bx}{(a+bx+x^2)^k}$ $\quad k > 0$ Nenner ohne Nullstelle
4. $\dfrac{C}{(a+bx+x^2)^k}$ $\quad k > 0$ Nenner ohne Nullstelle

es reicht also, jeden solchen als Summand auftretenden Typ einzeln zu integrieren: Wir erhalten (für die einzelnen Typen):

1. Klar! Stammfunktion $S(x)$ des Polynoms $s(x)$
2.
$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad k=1: & \displaystyle\int \frac{A}{a-x}\,\mathrm{d}x & = & -A\log|a-x|+c \\ \text{b)} \quad k>1: & \displaystyle\int \frac{A}{(a-x)^k}\,\mathrm{d}x & = & \dfrac{-A}{1-k}\,\dfrac{1}{(a-x)^{k-1}}+c \end{array}$$
3.
$$\frac{Bx}{(a+bx+x^2)^k} = \frac{B}{2}\underbrace{\frac{b+2x}{(a+bx+x^2)^k}}_{\varphi(x)} - \frac{Bb}{2}\underbrace{\frac{1}{(a+bx+x^2)^k}}_{\psi(x)}$$

   Die Funktion $\psi(x)$ ist vom Typ 4 und wird später behandelt; hier wird die Funktion $\varphi(x)$ integriert:

$$\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{h'(x)}{h(x)^k}\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rcl} h(x) & = & (a+bx+x^2) \\ h'(x) & = & b+2x \end{array}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-k}\,\dfrac{1}{h(x)^{k-1}}+c & k>1 \\ \log h(x)+c & k=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-k}\,\dfrac{1}{(a+bx+x^2)^{k-1}}+c & k>1 \\ \log(a+bx+x^2)+c & k=1 \end{cases}$$

4. Integration von $\dfrac{1}{(a+bx+x^2)^k}$:

   (a) Sei $k=1$, $a=1$ und $b=0$, dann ist bekanntermaßen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c$$

   (b) Sei $k=1$, $a,b \neq 1$, dann ist

$$\begin{aligned}(a+bx+x^2) &= \tfrac{1}{4}(4a-b^2)+\frac{b^2}{4}+bx+x^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{4}(4a-b^2)}_{=D}+\left(\tfrac{b}{2}+x\right)^2\end{aligned}$$

   Dabei ist $D>0$, andernfalls hätte der Nenner eine Nullstelle, man kann daher schreiben

$$\begin{aligned}(a+bx+x^2) &= D\left(1+\left(\frac{b}{2\sqrt{D}}+\frac{x}{\sqrt{D}}\right)^2\right) \\ \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx+x^2)} &= \frac{1}{\sqrt{D}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{D}\left(1+\left(\frac{b}{2\sqrt{D}}+\frac{x}{\sqrt{D}}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

Substituiere $y=\frac{x}{\sqrt{D}}+\frac{b}{2\sqrt{D}}$

mit $D=(4a-b^2)/4$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{D}}\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{D}}\arctan y + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{D}}\arctan\left(\frac{b}{2\sqrt{D}}+\frac{x}{\sqrt{D}}\right)+c\end{aligned}$$

   (c) Sei schließlich $k>1$, $a,b\neq 1$; substituiert man in dem Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx+x^2)^k}$$

   wie oben $y=\frac{1}{\sqrt{D}}(x+\frac{1}{2}b)$ und schreibt man anstatt der Unbestimmten y wieder x, so erhält man ein Integral des Typs:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^k}$$

Hierfür gilt die folgende Rekursionsformel:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^k} = \frac{x}{(2k-1)(1+x^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{k-1}}$$

Wendet man diese Rekursionsformel $k-1$-mal an, so erhält man ein Integral des Typs

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Beispiel:

a) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$

Zunächst führe man die Partialbruchzerlegung durch, Ansatz:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-2)\cdot(x-3)$

$$\Rightarrow x = A\cdot(x-3) + B\cdot(x-2)$$

$$\Rightarrow 1\cdot x + 0 = \underbrace{(A+B)}_{=1}\cdot x + \underbrace{(-3A-2B)}_{0}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A+B & = & 1 \\ -3A-2B & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A = -\tfrac{2}{3}\cdot B \wedge (-\tfrac{2}{3}\cdot B + \tfrac{3}{3}\cdot B = 1)$$

$$\Rightarrow \quad A = -\tfrac{2}{3}\cdot B \wedge (\tfrac{1}{3}\cdot B = 1)$$

$$\Rightarrow \quad B = 3, \quad A = -\tfrac{2}{3}\cdot B = -\tfrac{2}{3}\cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad B = 3, \quad A = -2$$

Damit erhält man

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-5x+6)} = \int \left(-2\,\frac{1}{x-2} + 3\,\frac{1}{x-3}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\,\log(|x-2|) + 3, \log(|x-2|) + c$$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)(1+x^2)}$

Zunächst führe man die Partialbruchzerlegung durch, Ansatz:

$$\frac{1}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B+Cx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = A + Ax^2 + B - Bx + Cx - Cx^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 = \underbrace{(A+B)}_{=1} + \underbrace{(C-B)}_{=0}\,x + \underbrace{(A-C)}_{=0}\,x^2$$

$$\Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} A+B & = & 1 \\ C-B & = & 0 \\ A-C & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad A = B = C = \tfrac{1}{2}$$

Damit erhält man

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\log|1-x| + \tfrac{1}{2}\,\arctan x$$

$$+ \ \tfrac{1}{4}\,\log(1+x^2) + c$$

35 Lineare Gleichungssysteme und das Gaußsche Verfahren

35.1 Einleitende Beispiele und Begriffe

Man trifft häufig auf die Situation, dass unbekannte Größen durch lineare Gleichungen voneinander abhängen. Erfüllen diese Gleichungen geeignete Bedingungen (was das genau bedeutet, werden wir in diesem Abschnitt sehen), so lassen sich diese Unbekannten aus ihnen bestimmen. Wir beginnen mit drei typischen Beispielen:

1. Beispiel: Wir betrachten ein System mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \quad \text{(I)} \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 10 & \quad \text{(II)} \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 & \quad \text{(III)} \end{array}$$

Um dieses Gleichungssystem lösen zu können, formen wir es in mehreren Schritten um:

1. Die zweite und dritte Gleichung werden „x_1–frei" gemacht:

$$\begin{array}{ccc} \text{(II)} & \longrightarrow & \text{(II)} - 3 \cdot \text{(I)} \\ \text{(III)} & \longrightarrow & \text{(III)} - 5 \cdot \text{(I)} \end{array}$$

   Das heißt: Das Dreifache der ersten Gleichung wird von der zweiten Gleichung abgezogen, und von der dritten Gleichung wird das Fünffache der ersten Gleichung abgezogen. Das Gleichungssystem wird dadurch zu

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \quad \text{(I)} \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & = & -32 & \quad \text{(II)} \\ & - & 9x_2 & - & 13x_3 & = & -57 & \quad \text{(III)} \end{array}$$

2. Die zweite Gleichung wird normiert, indem sie durch -4, den Koeffizienten von x_2 geteilt wird:

$$\text{(II)} \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{4} \cdot \text{(II)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \quad \text{(I)} \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 & \quad \text{(II)} \\ & - & 9x_2 & - & 13x_3 & = & -57 & \quad \text{(III)} \end{array}$$

3. In der dritten Gleichung wird x_3 eliminiert:

$$\text{(III)} \quad \longrightarrow \quad \text{(III)} \quad + \quad 9 \cdot \text{(II)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \quad \text{(I)} \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 & \quad \text{(II)} \\ & & & & 5x_3 & = & 15 & \quad \text{(III)} \end{array}$$

Nun können wir, bei der letzten Gleichung beginnend, ausrechnen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= 8 - 2x_3 = 2 \\ x_1 &= 14 - 2x_2 - 3x_3 = 14 - 4 - 9 = 1 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, seine Lösungsmenge besteht nur aus einem Element: $L = \{(1, 2, 3)\}$.

2. Beispiel: Auch dieses System mit drei Gleichungen mit drei Unbekannten wird in mehreren Schritten umgeformt:

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \quad (\mathrm{I}) \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 & \quad (\mathrm{II}) \\ 10x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

1. x_1 wird aus der zweiten und dritten Gleichung eliminiert:

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{II}) & \longrightarrow & (\mathrm{II}) - 7 \cdot (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{III}) & \longrightarrow & (\mathrm{III}) - 10 \cdot (\mathrm{I}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \quad (\mathrm{I}) \\ & - & 9x_2 & - & 13x_3 & = & -7 & \quad (\mathrm{II}) \\ & - & 18x_2 & - & 26x_3 & = & -9 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

2. x_2 wird aus der dritten Gleichung eliminiert:

$$(\mathrm{III}) \longrightarrow (\mathrm{III}) - 2 \cdot (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \quad (\mathrm{I}) \\ & - & 9x_2 & - & 13x_3 & = & -7 & \quad (\mathrm{II}) \\ & & & & 0x_3 & = & 5 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

Der letzte Schritt führte auch zur Eliminierung von x_3 in der dritten Gleichung. Man muss aber erkennen: das Gleichungssystem ist unlösbar: Welchen Wert man auch für x_3 einsetzt, es ist immer

$$0 = 0 \cdot x_3 \neq 5$$

Das Gleichungssystem kann also nicht erfüllt werden, seine Lösungsmenge ist leer: $L = \emptyset$!

3. Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \text{(I)} \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 35 & \text{(II)} \\ 10x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 14 & \text{(III)} \end{array}$$

Wir nehmen die üblichen Umformungen vor:

1. x_1 wird aus der zweiten und dritten Gleichung eliminiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{(II)} & \longrightarrow & \text{(II)} - 7 \cdot \text{(I)} \\ \text{(III)} & \longrightarrow & \text{(III)} - 10 \cdot \text{(I)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \text{(I)} \\ & - & 9x_2 & - & 13x_3 & = & -63 & \text{(II)} \\ & - & 18x_2 & - & 26x_3 & = & -126 & \text{(III)} \end{array}$$

2. x_2 wird aus der dritten Gleichung eliminiert:

$$\text{(III)} \longrightarrow \text{(III)} - 2 \cdot \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \text{(I)} \\ & - & 9x_2 & - & 13x_3 & = & -63 & \text{(II)} \\ & & & & 0x_3 & = & 0 & \text{(III)} \end{array}$$

Der letzte Schritt führte auch hier zusätzlich zur Eliminierung von x_3 in der dritten Gleichung. Gleichzeitig ist die rechte Seite der dritten Gleichung Null geworden. Daraus folgt: man kann für x_3 einen beliebigen Wert einsetzen, die Gleichung

$$0 = 0 \cdot x_3 = 0$$

gilt immer! Hat man einen Wert für x_3 eingesetzt, so kann man die Werte von x_1 und x_2 daraus berechnen:

$$\begin{aligned} x_2 &= 7 - \frac{13}{9} x_3 \\ x_1 &= 14 - 2x_2 - 3x_3 \qquad \text{jetzt } x_2 \text{ einsetzen} \\ &= 14 - 2 \cdot (7 - \frac{13}{9} x_3) - 3x_3 \\ &= -\frac{1}{9} x_3 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge hat wegen der freien Wählbarkeit von x_3 unendlich viele Elemente: Man wählt $x_3 = \lambda$ als **„freien Parameter“** und erhält so die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \left(-\frac{1}{9}\lambda, 7 - \frac{13}{9}\lambda, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Für jede spezielle Wahl von λ erhält man also eine gültige Lösung!
Die Lösungen sind damit abhängig von dem einen reellen Parameter λ!

Welche **Rechenmethodik** können wir aus diesen Beispielen ableiten?

1) Zunächst wird versucht, **von oben nach unten** Unbekannte aus den Gleichungen zu eliminieren, dieser Prozess heißt **Vorwärtselimination**.

2) Dann werden die Gleichungen nacheinander **von unten nach oben** gelöst, dieser Prozess heißt **Rück(wärts)substitution**. Dabei müssen eventuell **freie Parameter** gewählt werden, um die Lösbarkeit der gerade betrachteten Gleichung zu garantieren.

Bevor wir diese Rechenmethodik im Gaußschen Verfahren (Gauß-Algorithmus) verallgemeinern können, müssen wir einige formale Aspekte zu linearen Gleichungssystemen klären. Die **allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems** liefert die folgende

Definition:
Ein System der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{32}$$

heißt **lineares Gleichungssystem** mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, Koeffizienten a_{ij}, $i = 1 \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ und rechten Seiten $b_1, \ldots, b_m$. Ein abkürzende Schreibweise ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;=\; b_i \qquad \text{für } i = 1 \ldots, m$$

Ist $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, so heißt das Gleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Das Gleichungssystem mit denselben Koeffizienten $((a_{ij}))$, aber mit den rechten Seiten $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 = \cdots = \tilde{b}_m = 0$ heißt das **zugehörige homogene Gleichungssystem**:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;=\; 0 \qquad \text{für } i = 1 \ldots, m.$$

Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten besteht aus n Werten, die, für die Unbekannten eingesetzt, die Gleichungen erfüllen. Wir stellen die Unbekannten mit ihren n Komponenten durch einen sogenannten Spaltenvektor dar, indem wir schreiben:

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Einen Spaltenvektor bezeichnen wir durch einen kleinen Buchstaben mit einem Pfeil.

Beispiel: Das Gleichungssystem des Beispiels auf Seite 256 besitzt den Vektor der Unbekannten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist der Lösungsvektor dieses linearen Gleichungssystems

Die reellen Zahlen $a_{ij}(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ heißen Koeffizienten des linearen Gleichungssystems; Sie werden in der Koeffizientenmatrix (einem rechteckigen Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst.
Man schreibt dafür auch abkürzend

$$A = ((a_{ij}),\ i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n)$$

Beispiel: Das Gleichungssystem des Beispiels auf Seite 256 hat die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Die Zahlen $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ bilden den Vektor der rechten Seite

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R},$$

für $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ erhält man den Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Das inhomogene lineare Gleichungssystem schreibt man dann abkürzend

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m)$$

und das (zugehörige) homogene lineare Gleichungssystem schreibt man abkürzend

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad (\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m)$$

Wir fassen die Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems als Teilmenge der Menge $\mathbb{R}^n$ aller n–Tupel auf:

$$L \subset \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiele: In den drei einleitenden Beispielen auf Seite 256 haben wir gesehen, dass für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems drei Möglichkeiten bestehen

$$L_1 = \{\vec{u}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$ Es gibt genau eine Lösung.

$$L_2 = \emptyset$$ Das Gleichungssystem ist unlösbar.

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}\lambda \\ 7 - \frac{13}{9}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele

Lösungen in Abhängigkeit von (mindestens) einem freien Parameter.

Wir werden sehen, dass dieses alle Möglichkeiten sind. Wie man eine Lösung findet, erkennt man an den drei einleitenden Beispielen (siehe Seite 256 ff): Durch zulässige Umformungen verringert man die Anzahl der Unbestimmten von einer Gleichung zur nächsten und löst anschließend das Gleichungssystem, bei der letzten Gleichung beginnend, auf.

Das **Ziel** der Umformungsschritte ist eine Form des Gleichungssystems, in der die Unbestimmte x_1 ab der zweiten Gleichung nicht mehr erscheint, x_2 ab der dritten Gleichung nicht mehr erscheint und x_3 ab der vierten Gleichung nicht mehr erscheint und so weiter, falls das Gleichungssystem mehr als drei Unbestimmte besitzt.

Zulässige Umformungen eines Gleichungssystems sind solche, die die **Lösungsmenge des Gleichungssystems unverändert lassen**; davon gibt es drei Arten:

- **Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ (bzw. Division durch ein $\lambda \neq 0$)**
- **von einer Gleichung das Vielfache einer anderen abziehen**
- **zwei Gleichungen vertauschen**

Zwei Gleichungssysteme, die durch zulässige Vertauschungen auseinander hervorgehen, heißen **äquivalent**.
Aus diesen drei grundlegenden zulässigen Umformungen bekommt man durch Hintereinanderausführung sofort eine für die Rechentechnik hilfreiche weitere **zulässige Umformung**

- **Ersetzen einer Gleichung durch eine Summe aus einem Vielfachen dieser Gleichung und dem Vielfachen einer anderen Gleichung des linearen Gleichungssystems.**

In diesem Abschnitt soll es nicht nur darum gehen, Wege zum Lösen linearer Gleichungssysteme aufzuzeigen, sondern wir wollen uns eingehender mit der Struktur linearer Gleichungssysteme befassen.

Bei dem Umgang mit linearen Gleichungssystemen sind die beiden folgenden Fragen von Bedeutung:

Frage 1: Unter welchen Umständen ist ein Gleichungssystem mit gegebenen Koeffizienten (a_{ij}) immer lösbar, unabhängig davon, welche Werte $b_1, \ldots, b_m$ auf der rechten Seite stehen?

Frage 2: Was kann man über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sagen? Wann ist insbesondere ein Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Unser Ziel ist die Beantwortung dieser beiden Fragen.

Für den Fall, dass ein Gleichungssystem nicht für alle rechten möglichen Seiten $b_1, \ldots, b_m$ lösbar ist, ist eine weitere Frage sinnvoll, auf die wir jedoch nicht eingehen wollen:

Frage 3: Wie sieht die Menge der rechten Seiten $b_1, \ldots, b_m$ eines Gleichungssystems aus, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt?

Alle Fragen sind so gestellt, dass sie nur die Koeffizienten (a_{ij}) betreffen, die Werte auf der rechten Seite (b_i) werden als austauschbar betrachtet. Wir konnten bereits in unseren einleitenden Beispielen erkennen, dass die **Auswahl der vorgenommenen Umformungsschritte nur von den Koeffizienten auf der linken Seite** abhing.

Beispiele:

1. Bei dem 1. Beispiel auf Seite 256 lässt sich immer eine eindeutige Lösung ausrechnen, auch wenn man die Werte auf der rechten Seite beliebig verändert.

2. Die Ströme in einem linearen Gleichstromkreis lassen sich durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen, die Form und insbesondere die Koeffizienten der Gleichungen ergeben sich aus der (häufig festen) Form des Schaltkreises (Anwendung der Knoten- oder Maschenbedingungen (Kirchhoff)); die rechten Seiten der Gleichungen hängen von den (häufig veränderlichen) Werten der Spannungsquellen ab.

Um uns den Antworten auf diese beiden Fragen anzunähern, wenden wir uns zunächst besonders einfachen Gleichungssystemen, nämlich den homogenen Gleichungssystemen zu.

35.2 Homogene Gleichungssysteme

Homogene Gleichungssysteme sind solche, bei denen auf der rechten Seite nur Nullen stehen.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Homogene Gleichungssysteme besitzen mit Sicherheit immer mindestens eine Lösung, nämlich die Null:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine weitere Besonderheit homogener Gleichungssysteme ist:

Satz:
Die Lösungsmenge L eines **homogenen Gleichungssystems** ist abgeschlossen gegen-

über komponentenweiser Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen, d. h.:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in L \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in L \;\Rightarrow\; \vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \in L$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in L \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \in L$$

Beweis: $\vec{u} \in L$ und $\vec{v} \in L$ bedeutet, dass beide das homogene Gleichungssystem erfüllen, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

Die Addition beider Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j+v_j) \\ \Rightarrow\quad & 0 + 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j+v_j) \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m \\ \Rightarrow\quad & \vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt das Gleichungssystem} \\ \Rightarrow\quad & \vec{u}+\vec{v} \in L \end{aligned}$$

Den zweiten Teil der Behauptung erhält man, in dem man für $i = 1, \ldots, m$ beide Seiten der Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert.

qed

Ein einfache Folgerung aus dem Satz ist dieses: Hat ein homogenes Gleichungssystem zwei verschiedene Lösungen, so hat es bereits unendlich viele Lösungen. Sind nämlich $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Lösungen, so muss mindestens eine von ihnen ungleich Null sein; ist etwa $\vec{u} \neq 0$, so ist nach dem Satz für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda\vec{u}$ eine Lösung; dieses sind unendlich viele verschiedene!

Bei der Behandlung beliebiger (d. h. insbesondere inhomogener) Gleichungssysteme ist es nützlich, das zugehörige homogene Gleichungssystem[32] zu betrachten. Einen ersten Zusammenhang zwischen einem allgemeinen Gleichungssystem und seinem zugehörigen homogenen Gleichungssystem gibt der folgende

Hilfssatz:
Sei L die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

und L^H die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, dann gilt

$$\vec{u}, \vec{v} \in L \quad \Rightarrow \quad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ \vdots \\ u_n - v_n \end{pmatrix} \in L^H$$

Das bedeutet: Die Differenz zweier Lösungen ist Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Beweis: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind Lösungen, d. h. sie erfüllen das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j &= b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j &= b_i \end{aligned}\right. \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

Die Subtraktion beider Gleichungen liefert für $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = b_i - b_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j - v_j) = 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m \\ \Rightarrow \quad & \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ \vdots \\ u_n - v_n \end{pmatrix} \quad \text{ist Lösung des homogenen Systems} \end{aligned}$$

qed

[32] d. h. das Gleichungssystem mit denselben Koeffizienten, das auf der rechten Seite nur Nullen hat

Beispiel: Das Beispiel Nr. 3 auf Seite 258

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 & \quad (\mathrm{I}) \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 35 & \quad (\mathrm{II}) \\ 10x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 14 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

hatte, wie berechnet, die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}\lambda \\ 7 - \frac{13}{9}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Sind etwa $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die beiden Lösungen, die zu $\lambda = 18$ und $\lambda = 0$ gehören, so rechnet man leicht nach, dass deren Differnz $\vec{u} - \vec{v}$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems ist:

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -19 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -26 \\ 18 \end{pmatrix} \in L^H$$

Den endgültigen Zusammenhang zwischen L und L^H beschreibt der folgende

Satz:
Sei

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

eine fest gewählte (man sagt: eine spezielle) Lösung des linearen Gleichungssystems. Man erhält alle weiteren Lösungen dadurch, daß man zu $\vec{x}_0$ beliebige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems addiert. Man schreibt diese Aussage in der Form

$$L = \vec{x}_0 + L^H = \{\vec{u} \mid \vec{u} = \vec{x}_0 + \vec{v} \text{ mit } \vec{v} \in L^H\}$$

Beweis: 1. Schritt: Wir müssen zeigen, dass jeder Summe der Form

$$\vec{u} = \vec{x}_0 + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_{01} + v_1 \\ \vdots \\ x_{0n} + v_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in L^H$$

das lineare Gleichungssystem erfüllt. Wir testen das aus, indem wir ganz einfach $\vec{u} = \vec{x}_0 + \vec{v}$ in das Gleichungssystem einsetzen:

Für $i = 1, \ldots, m$ ist dann

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_{0j} + v_{0j}) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{0j} \;+\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$$

Nun ist für $i = 1, \ldots, m$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{0j} \;=\; b_i$$ denn $\vec{x}_0$ ist Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \;=\; 0$$ denn $\vec{v}$ ist Lösung des homogenen Gleichungssystems

Verwendet man dieses, so ist für $i = 1, \ldots, m$ schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_{0j} + v_j) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{0j} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \\ &= b_i + 0 \\ &= b_i\end{aligned}$$

Also:

$$\vec{x}_0 + \vec{v} \;\in\; L \qquad \text{für jedes } \vec{v} \in L^H$$

2. Schritt: Sei $\vec{u} \in L$ beliebig, wir müssen zeigen, dass sich $\vec{u}$ in der Form

$$\vec{u} \;=\; \vec{x}_0 + \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{v} \in L^H$$

darstellen lässt. Zu finden ist ein geeignetes $\vec{v} \in L^H$; wir setzen dazu an

$$\vec{v} \;=\; \vec{u} - \vec{x}_0 \;=\; \begin{pmatrix} u_1 - x_{01} \\ \vdots \\ u_n - x_{0n} \end{pmatrix}$$

Da $\vec{x}_0$ und $\vec{u}$ beides Lösungen des Gleichungssystems sind, ist nach dem vorangegangenen Hilfssatz (siehe Seite 265) $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x}_0$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems; $\vec{v}$ leistet daher das Gewünschte: es ist

$$\vec{u} \;=\; \vec{x}_0 + (\vec{u} - \vec{x}_0) \;=\; \vec{x}_0 + \vec{v} \quad \text{mit} \quad \vec{v} \in L^H$$

Damit ist alles bewiesen.

qed

Dieser Satz besitzt eine ähnlich Folgerung wie der Satz auf Seite 264: hat ein allgemeines lineares Gleichungssystem zwei verschiedene Lösungen $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$, so besitzt es bereit unendlich viele Lösungen: Es ist nämlich

$$0 \;\neq\; \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \;\in\; L^H \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \;\in\; L^H \quad \text{für all } \lambda \in \mathbb{R}$$

Daraus gewinnt man die unendlich vielen Lösungen

$$\vec{u}_1 + \lambda \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \in L$$

Eine weitere Folgerung aus dem Satz, die uns dicht an die Antwort von Frage 2 (siehe Seite 262) heranführen wird, ist

Folgerung: Ein lösbares lineares Gleichungssystem sei gegeben. Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die Lösung 0 besitzt.

Beweis: Die Aussage folgt aus

$$L = \vec{x}_0 + L^H \qquad \text{mit einem speziellen } \vec{x}_0 \in L$$

L hat nur dann genau die einzige Lösung $\vec{x}_0$, wenn L^H nur die Nullösung enthält.

qed

Wir müssen jetzt noch klären,

- wann ein homogenes System nur die Nullösung besitzt;
- wie man feststellt, ob ein Gleichungssystem mindestens eine spezielle Lösung $\vec{x}_0$ besitzt;
- wie man die spezielle Lösung $\vec{x}_0$ findet.

Um dieses zu erkennen, müssen wir das Gleichungssystem geeignet umformen. Dieses ist Inhalt des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Wir werden mit dessen Hilfe entdecken, dass es neben der Anzahl der Unbestimmten n und der Anzahl der Gleichungen m noch zwei Maßzahlen für ein lineares Gleichungssystem gibt: dessen Rang r und Corang s.

Mit Hilfe von r und s werden wir die beiden Fragen auf Seite 262 beantworten können.

35.3 Das Gaußsche Verfahren - der Gauß-Algorithmus

Um weitergehende Aussagen über ein lineares Gleichungssystem zu gewinnen, muss man das Gleichungssystem auf die Art umformen, wie es in den ersten Beispielen dieses Abschnitts (siehe Seite 256) erfolgte. Hier dürfen natürlich nur die zulässigen Umformungen (siehe Seite 262) benutzt werden. Diese Vorgehensweise ist genau der Inhalt des Gaußschen Satzes. Zunächst dazu aber noch ein

Beispiel: Wir wollen das 5×5–Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 2 \\ -2x_1 - 10x_2 - 5x_3 + x_4 - 2x_5 &= -6 \\ -2x_1 - 10x_2 - 9x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= -1 \\ -x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 4 \end{aligned} \tag{34}$$

lösen. Wir beginnen, indem wir das 2–Fache der ersten Gleichung zur zweiten und dritten Gleichung addieren, die erste Gleichung von der vierten abziehen und die erste Gleichung zur letzten addieren; wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 2 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 &= -2 \\ -\,3x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 7 \\ 2x_3 - x_4 - 6x_5 &= -3 \\ -\,2x_3 + 4x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 6 \end{aligned}$$

Wir addieren jetzt das Dreifache der zweiten Gleichung zur dritten, ziehen das Doppelte der zweiten von der vierten ab, addieren das Doppelte der zweiten zur fünften und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 2 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 &= -2 \\ x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_4 - 4x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Als letztes ziehen wie noch die dritte Gleichung bzw. deren Doppeltes von der vierten und fünften Gleichung ab und erhalten die fertige Umformung:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 2 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 &= -2 \\ x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 0x_5 &= 0 \\ 0x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Diese Form des Gleichungssystems ist dadurch gekennzeichnet, dass

- die Variable x_i (spätestens) ab der $i+1$ Gleichung nicht mehr erscheint,
- einige der Variablen einmal an einer „Stufe“ mit Koeffizienten 1 vorkommen (x_1, x_3, x_4), andere Variablen hingegen nur im „Inneren“ der Gleichungen auftauchen (x_2, x_5),
- die beiden letzten Gleichungen entartete „Nullgleichungen“ sind, alle Koeffizienten in ihnen sind Null.

Da auch ihre rechten Seiten der Nullgleichungen Null sind, ist dieses Gleichungssystem lösbar.

Jetzt zur Verallgemeinerung!

<u>**Satz:**</u> (**Gaußsches Eliminationsverfahren - Teil 1: Vorwärtselimination**)
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Hierzu gibt es ein äquivalentes[33] Gleichungssystem in sogenannter reduzierter Form oder Zeilenstufenform. Schreibt man nur die Koeffizienten der Zeilenstufenform auf, so erhält man ein Schema der folgenden Art:

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc||c}
0 & 1 & * & * & * & * & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \beta_1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & \cdots & * & \cdots & * & \beta_2 \\
\vdots & & & 0 & 0 & 1 & * & * & & \vdots & & \vdots & \beta_3 \\
 & & & \vdots & & 0 & 0 & 0 & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & * & \cdots & * & \beta_r \\
0 & & & 0 & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1} \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & & & 0 & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_m
\end{array}\right|$$

Hierbei sind die $*$ irgendwelche Zahlen, die β_i sind die rechten Seiten der umgeformten Gleichungen.

Die genaue Darstellung der reduzierten Form lautet:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{k_1} & + & \alpha_{1k_1+1}\cdot x_{k_1+1} & + & \alpha_{1k_1+2}\cdot x_{k_1+2} & + & \alpha_{1k_1+3}\cdot x_{k_1+3} & + & \ldots & + & \alpha_{1n}\cdot x_n & = & \beta_1 \\
0 & + & x_{k_2} & & +\alpha_{2k_2+1}\cdot x_{k_2+1} & + & \alpha_{2k_2+2}\cdot x_{k_2+2} & + & \ldots & + & \alpha_{2n}\cdot x_n & = & \beta_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ldots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + & 0 & + & x_{k_r} & & +\alpha_{rk_r+1}\cdot x_{k_r+1} & + & \ldots & + & \alpha_{rn}\cdot x_n & = & \beta_r \\
\hline
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0\cdot x_{k_r+1} & + & \ldots & + & 0\cdot x_n & = & \beta_{r+1} \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ldots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0\cdot x_{k_r+1} & + & \ldots & + & 0\cdot x_n & = & \beta_m
\end{array} \qquad (36)$$

[33] d. h. durch zulässige Umformungen gewonnenes

Dabei sind die

$$k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N} \qquad (r \in \mathbb{N}_0\ )$$

Zahlen mit

$$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n, m$$

Sie geben die Position der Stufe in einer Zeile an. Hiermit **endet die Vorwärtselimination** im Gauß-Algorithmus: Das Gleichungssystem ist überführt in ein **äquivalentes** lineares Gleichungssystem in **Zeilenstufenform**. Unterhalb der r-ten Zeile stehen links vom Gleichheitszeichen nur noch Nullen als Koeffizienten vor den Unbekannten; ab der r+1-ten Gleichung (r+1-ten Zeile) haben die Gleichungen also die Form $0 = \beta_j, \quad r+1 \leq j \leq m$. Links vom Gleicheitszeichen hat man hier also eine sog. **Nullzeile**.

Wie erhält man die Zeilenstufenform?
Die Beweisidee vom 1. Teil: Vorwärtselimination:
Nach eventuellem Zeilentausch kann man davon ausgehen, dass $\alpha_{11} \neq 0$ gilt. Dann wird (beginnend mit der nächsten Zeile) Zeile für Zeile durch **zulässige Umformungen** der Form

(neue i-te Zeile) = alte Zeile - $-\alpha_{i1}/\alpha_{11}\cdot$(alte i-te Zeile)

so umgeformt, dass an der ersten Stelle eine Null, genauer $0 \cdot x_1$ steht. Danach sucht man den Koeffizienten $\alpha_{ij} \neq 0$ mit kleinstem Zeilenindex i und kleinstem Zeilenindex j und wiederholt das für die ersten beiden Zeilen durchgeführte Verfahren beginnend in der i-ten Zeile.
Dieser Prozess wird so lange durchgeführt, bis alle m Zeilen des Gleichungssystems bearbeitet sind. Durch wiederholten Zeilentausch werden die eventuell vorhandenen Nullzeilen schließlich nach unten gebracht. In jeder Nichtnullzeile führt Division durch den führenden Koeffizienten dazu, dass die Zeilen mit einer 1 als Koeffizienten beginnen.

Definition:
Die Zahl r aus dem Satz heißt **Rang** des Gleichungssystems, $s = n-r$ heißt **Corang**. Der **Rang r** eines linearen Gleichungssystems ist also die **Anzahl der Nichtnullzeilen links vom Gleichheitszeichen** am Ende der Vorwärtselimination des Gauß-Algorithmus. Der **Corang** ist die **Anzahl der Unbekannten minus Rang** des linearen Gleichungssystems. Der **erweiterte Rang $\bar{\mathbf{r}}$** ist die **Anzahl der Nichtnullzeilen** am Ende der Vorwärtselimination des Gauß-Algorithmus unter Berücksichtigung aller Terme also **links und rechts vom Gleichheitszeichen**.

<u>Beispiel</u>: Das Gleichungssystem auf Seite 269 hat die reduzierte Form (Zeilenstufenform)

$$\begin{aligned}
x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad &= 2\\
x_3 - x_4 - 2x_5 &= -2\\
x_4 - 2x_5 &= 1\\
0x_5 &= 0\\
0x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Wir erkenne zwei komplette Nullzeilen, damit gilt:

Rang r = 3

Corang s = 5 - 3 = 2

erweiterter Rang $\bar{\text{r}}$ = 3

In diesem Fall gilt also r=$\bar{\text{r}}$, der Rang ist gleich dem erweiterten Rang.

<u>**Satz:**</u> (**Gaußsches Eliminationsverfahren - Teil 2: Rück(wärts)substitution**)
Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in **Zeilenstufenform**

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_{k_1} + & \alpha_{1k_1+1}\cdot x_{k_1+1} + & \alpha_{1k_1+2}\cdot x_{k_1+2} + & \alpha_{1k_1+3}\cdot x_{k_1+3} + \ldots + & \alpha_{1n}\cdot x_n = & \beta_1\\
0 + & x_{k_2} & +\alpha_{2k_2+1}\cdot x_{k_2+1} + & \alpha_{2k_2+2}\cdot x_{k_2+2} + \ldots + & \alpha_{2n}\cdot x_n = & \beta_2\\
\vdots + & \vdots & + \quad \vdots & + \quad \vdots \quad + \ldots + & \vdots \quad = & \vdots\\
0 + & 0 & + \quad x_{k_r} & +\alpha_{rk_r+1}\cdot x_{k_r+1} + \ldots + & \alpha_{rn}\cdot x_n = & \beta_r\\
\hline
0 + & 0 & + \quad 0 & + \quad 0\cdot x_{k_r+1} \quad + \ldots + & 0\cdot x_n = & \beta_{r+1}\\
\vdots + & \vdots & + \quad \vdots & + \quad \vdots \quad + \ldots + & \vdots \quad = & \vdots\\
0 + & 0 & + \quad 0 & + \quad 0\cdot x_{k_r+1} \quad + \ldots + & 0\cdot x_n = & \beta_m
\end{array} \tag{37}$$

dann gilt:

1) Das lineare Gleichungssystem ist **lösbar**, wenn gilt: r = $\bar{\text{r}}$, also **Rang = erweiterter Rang**.

2) Ist $s = n - r > 0$, also **Corang > 0**, so hat das lineare Gleichungssystem **unendlich viele Lösungen**, die Lösungen enthalten **s freie Parameter**.

3) Das lineare Gleichungssystem hat **genau eine Lösung**, wenn gilt: r = $\bar{\text{r}}$ = n und damit $s = 0$.

4) Die **Lösungsmenge** berechnet man nach folgendem Algorithmus, der sog. **Rück(wärts)substitution**:
<u>**Die Beweisidee vom 2. Teil: Rück(wärts)substitution:**</u>

Man löst die **letzte (unterste) Nichtnullzeile** nach der **führenden Unbekannten** auf. Wenn danach rechts vom Gleichheitszeichen Unbekannte stehen, ersetzt man diese durch **freie Parameter**.
Dann arbeitet man sich **zeilenweise nach oben (zurück/rückwärts)** und löst auch diese Zeilen jeweils nach der führenden Unbekannten auf. Die Unbekannten rechts vom Gleichheitszeichen **substituiert** man (d.h. ersetzt man) durch die zuvor berechneten Ausdrücke für die jeweilige Unbekannte. Ist eine Substitution nicht möglich, ersetzt man diese Unbekannte durch einen weiteren freien Parameter.

Beispiel: Das Gleichungssystem auf Seite 269 hat die reduzierte Form (Zeilenstufenform)

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad &= 2 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 &= -2 \\ x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 0x_5 &= 0 \\ 0x_5 &= 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt also r=r̄=3, der Rang ist gleich dem erweiterten Rang und Corang s=2, d.h.:
Das lineare Gleichungssystem ist lösbar, die Lösungsmenge enthält unendlich viele Elemente abhängig von 2 freien Parametern.
Man findet die Lösungen, indem man die erste Nichtnullzeile nach der führenden Unbekannten x_4 auflöst und $x_5 = \lambda_1$ als 1. freien Parameter setzt:

$$x_4 \;=\; 1 + 2x_5 \;=\; 1 + 2\lambda_1$$

und anschließend zeilenweise nach oben (zurück/rückwärts) berechnet:

$$x_3 \;=\; -2 + x_4 + 2x_5 = -2 + (1 + 2\lambda_1) + 2\lambda_1 \;=\; -1 + 4\lambda_1$$

$$x_1 \;=\; 2 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 \;=\; 6 - 5x_2 - 10\lambda_1$$

dabei setzt man $x_2 = \lambda_2$ als weiteren (2.) freien Parameter, man erhält so:

$$x_1 \;=\; 6 - 10\lambda_1 - 5\lambda_2$$

Als Ergebnis bekommen wir die Lösungsmenge

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 6 - 10\lambda_1 - 5\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -1 + 4\lambda_1 \\ 1 + 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \qquad (38)$$

Für jede spezielle Wahl der freien Parameter λ_1 und λ_2 bekommt man eine spezielle Lösung des linearen Gleichungssystems, z.B. für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$:

$$\vec{x_s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Folgerung: Ein Gleichungssystem ist genau dann höchstens eindeutig lösbar, wenn sein Rang gleich der Anzahl der Unbekannten ist:

$$r = n$$

Man sagt: Das Gleichungssystem besitzt **vollen Rang**.

Beispiel: Das Gleichungssystem von Seite 256 besitzt die reduzierte Form

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Sein Rang ist $r = 3 = n$, und es gibt nur eine Lösung $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

Beispiel: Das Gleichungssystem von Seite 258 mit der reduzierten Form

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ & & x_2 & + & \frac{13}{9}x_3 & = & 7 \\ & & & & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

besitzt keinen vollen Rang, es ist hier $r = 2 < 3 = n$. Wie wir gesehen haben, ist es nicht eindeutig lösbar, die Lösungsmenge ist unendlich:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -(1/9)\lambda \\ 7 - (13/9)\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir sind jetzt dicht an der Antwort zu Frage 2 auf Seite 262. Wir kommen jetzt nochmal auf homogene Gleichungssysteme zurück.

<u>**Satz**</u>:
Ein homogenes Gleichungssystem mit n Unbekannten besitzt genau dann nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, wenn sein Rang $r = n$ ist.

<u>Beweis</u>: Nach der Folgerung auf Seite 274 ist eine Gleichungssystem genau dann höchstens eindeutig lösbar, wenn $r = n$ ist. Da ein homogenes Gleichungssystem immer die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ besitzt, ist $\vec{x} = \vec{0}$ in diesem Falle die einzige Lösung.

qed

<u>**Satz**</u>:
Ein homogenes Gleichungssystem mit Corang $s > 0$ besitzt s sogenannte **Grundlösungen** (oder **Basislösungen**)

$$\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_s$$

so dass für die Lösungsmenge L^H des homogenen Systems gilt

$$L^H \ = \ \{\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_s\vec{x}_s \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\ \}$$

Diese Aussage besagt, dass sich <u>alle</u> Lösungen eines homogenen Systems als Summe von Vielfachen endlich vieler fest gewählter Lösungen darstellen lassen. Die Faktoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sind dabei <u>**freie Parameter**</u> oder auch <u>Freiheitsgrade</u>.

Anstelle eines Beweises geben wir nur an, wie man die Grundlösungen $\vec{x}_1,\ \ldots,\ \vec{x}_s$ erhält.

Bei den freien Parametern

$$\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_s$$

, die bei Corang $s > 0$ im Gaußschen Elimanationsverfahren gesetzt werden, geben wir immer genau einem Parameter den Wert 1 und den anderen Parametern den Wert 0. Wir erhalten so $\vec{x}_i$, indem wir

$$\lambda_i \ = \ 1,\ \lambda_j \ = \ 0,\ \ldots, j \neq i,\ 1 \leq i, j \leq s$$

setzen.

<u>Beispiel</u>: Wir betrachten das zu dem Gleichungssystem (34) auf Seite 269 gehörige homogene System, seine reduzierte Form unterscheidet sich von (35) nur dadurch, dass auf der rechten Seite nur Nullen stehen;

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 0x_5 &= 0 \\ 0x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Man erkennt: der Corang ist $s = 2$ und die Lösungsmenge ist

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -10\lambda_1 - 5\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 4\lambda_1 \\ 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{40}$$

Wir wollen die beiden Grundlösungen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ berechnen:

$\vec{x}_1$**:** Man setzt

$$\lambda_1 = 1 \quad und \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_2$**:** Man setzt

$$\lambda_1 = 0 \quad und \quad \lambda_2 = 2 \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge des homogenen Systems

$$L^H \;=\; \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = L \tag{41}$$

Wir fassen jetzt die beiden Sätze auf den Seiten 266 und 275 zusammen und erhalten als ein Endergebnis dieses Abschnitts den

Satz:
Ein allgemeines Gleichungssystem, besitzt, sofern es lösbar ist, die Lösungsmenge

$$L \;=\; \{\vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_s \vec{x}_s \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\ \} \tag{42}$$

Dabei ist $\vec{x}_0$ eine spezielle Lösung des Gleichungssystems und $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$ sind die s Grundlösungen des zugehörigen homogenen Systems.

<u>Beweis</u>: Es ist

$$\begin{aligned} L &= \vec{x}_0 + L^H && \text{nach dem Satz auf Seite 266} \\ &= \vec{x}_0 + \{\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_s\vec{x}_s \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\} && \text{nach dem Satz auf Seite 275} \\ &= \{\vec{x}_0 + \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_s\vec{x}_s \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

qed

<u>Beispiel</u>: Nimmt man die obige Gleichung (41) und die in dem Beispiel auf Seite 273 berechnete spezielle Lösung (38), so erhält man die Lösungsmenge des Gleichungssystems (34):

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nun haben wir auf die beiden zentralen Fragen dieses Abschnitts (siehe Seite 262) Antworten gefunden:

Antwort auf Frage 1: Ein Gleichungssystem mit gegebenen Koeffizienten (a_{ij}) ist genau dann immer lösbar, unabhängig davon, welche Werte $b_1, \ldots, b_m$ auf der rechten Seite stehen, wenn sein Rang gleich der Anzahl der Gleichungen ist: $r = m$.

Antwort auf Frage 2: Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wird durch (42) beschrieben. Das Gleichungssystem ist insbesondere nur eindeutig lösbar, wenn $n - r = s = 0$ bzw. $n = r$ ist (siehe Seite 274).

Zusammenfassend folgt hier noch einmal eine Liste der Schritte, die man beim Lösen eines gegebenen linearen Gleichungssystems ausführt:

1. Herstellen der reduzierten Form mit dem Gaußschen Verfahren
2. Beachten der Nullgleichungen: Sind Nullgleichungen vorhanden, die auf der rechten Seite von Null verschiedene Werte besitzen, so kann man wegen der Unlösbarkeit des Gleichungssystems den Lösungsvorgang abbrechen.
3. Im Falle eines inhomogenen Systems Bestimmung einer speziellen Lösung $\vec{x}_0$
4. Im Falle von $s >$ Bestimmung der s Grundlösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$ des zugehörigen homogenen Systems.
5. Aufstellen der Lösungsmenge nach (42)

35.4 Das Gauß-Schema zur Formalisierung des Gauß-Algorithmus

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit der **Koeffizientenmatrix** $\underline{\underline{A}}$, dem **Vektor der Unbekannten** $\vec{x}$ und dem **Vektor der rechten Seite** $\vec{b}$ (auch kurz „rechte Seite“ genannt).
Wie wir gesehen haben, kommt es bei der Durchführung der Vorwärtselimination des Gauß-Algorithmus nicht auf die Bezeichnung (Namen) der Unbekannten sondern nur auf die **Koeffizientenmatrix** $\underline{\underline{A}}$ und den **Vektor der rechten Seite** $\vec{b}$ an.

Daher kann man das Verfahren **stark formalisiert** im sogenannten **Gauß-Schema** durchführen. Das Gauß-Schema ist eine **Tabelle** mit zwei Spalten (linke Spalte und rechte Spalte), die jeweils links eine Matrix und rechts einen Vektor enthält. Jede elementare Umformung der Vorwärtselimination, die simultan in der linken und rechten Spalte durchgeführt wird, erzeugt eine neue Spalte diesen Typs. Man startet in der ersten Zeile mit der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ in der linken Spalte und dem Vektor der rechten Seite $\vec{b}$ in der rechten Spalte (vereinfacht ohne Klammern geschrieben). Am Ende der Vorwärtselimination hat man in der linken Spalte eine Matrix in Dreiecks- bzw. Trapezform (mit Nullzeilen) und in der rechten Spalte einen Vektor.
Dann kann man folgende Größen ermitteln:

1) Der **Rang** von $\underline{\underline{A}}$ ist die Anzahl der Nichtnullzeilen in der linken Spalte des Schemas.
2) Der **erweiterte Rang** ist die Anzahl der Nichtnullzeilen im kompletten Schema, d.h. unter Berücksichtigung der linken Spalte und der rechten Spalte.
3) Gilt **Rang**$\neq$**erweiterter Rang**, ist das Gleichungssystem nicht lösbar.
Gilt **Rang**$=$**erweiterter Rang** kann die **Rück(wärts)substitution** zur Lösung des linearen Gleichungssystems beginnen.

Falls das Gleichungssystem lösbar ist,kann man dann anschließend durch **Rücksubstitution/Rückwärtseinsetzen** die Lösungen berechnen.
Das folgende Beispiel demonstriert das gerade beschriebene Vorgehen.

Beispiel:
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das **zugehörige Gauß-Schema** ist dann

-2	-1	3	1	
2	2	3	2	
4	1	-3	3	II+I und III+2·I
-2	-1	3	1	
0	1	6	3	
0	-1	3	5	III+II
-2	-1	3	1	
0	1	6	3	
0	0	9	8	

Dabei wurde gerechnet (römische Ziffern bezeichnen die Gleichungen des Systems):
1. Schritt (von erster Zeile zu zweiter Zeile der Tabelle): II+I und III+2·I
2. Schritt (von zweiter Zeile zu dritter Zeile der Tabelle): III+II

Man sieht: Rang=erweiterter Rang $\Rightarrow$ das Gleichungssystem ist lösbar,
Corang=0 $\Rightarrow$ man benötigt keine freien Parameter,
die Rücksubstitution startet in der letzten Zeile des Gleichungssystems:
$x_3 = \frac{8}{9}$ und durch Rückwärtseinsetzen erhält man $x_2 = 3 - 6 \cdot x_3 = -\frac{7}{3}$ und $x_1 = -\frac{1}{2} \cdot (1 + x_2 - 3 \cdot x_3) = -\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{7}{3} - 3 \cdot \frac{8}{9}) = -\frac{1}{2} \cdot (-4) = 2$

35.5 Quadratische Gleichungssysteme

Von besonderem Interesse und am häufigsten vorkommend sind die quadratischen Gleichungssysteme. **Ein Gleichungssystem heißt quadratisch, wenn die Anzahl seiner Unbestimmten gleich der Anzahl seiner Gleichungen ist, d. h. n=m**

Das Bemerkenswerte an quadratischen Gleichungssystemen ist, dass die Beantwortung der beiden Fragen (Seite 262) zusammenfällt. Dieses findet Ausdruck in dem folgenden

Satz:
Ein quadratisches Gleichungssystem (wie (32) auf Seite 259 jedoch mit $n = m$) ist genau dann für jede rechte Seite $b_1, \ldots, b_n$ lösbar, wenn es immer höchstens eindeutig lösbar ist.

Eine hierzu gleichwertige Aussage wird uns bei der Polynominterpolation nützlich sein:

Satz:
Ein quadratisches Gleichungssystem ist genau dann für jede rechte Seite $b_1, \ldots, b_n$ lösbar, wenn sein zugehöriges homogenes System nur die Nullösung besitzt.

Die Beweise dieser beiden Sätze ergeben sich ohne Rechenaufwand direkt aus den Sätzen dieses Abschnitts. Die Beweise werden als übung empfohlen; man erhält sie auch unmittelbar aus dem zweiten Teil der folgenden übersicht.

35.6 Übersicht zur Bedeutung von Rang und Corang

1. Es ist $r \leq n$ sowie $r \leq m$.

2. $r = n \Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem besitzt für jede rechte Seite (b_i) höchstens eine Lösung.
   $\Leftrightarrow$ Das zugehörige homogene System besitzt nur die Lösung 0.

3. $r = m \Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem ist für jede rechte Seite (b_i) lösbar.

4. $s = n - r > 0 \Leftrightarrow$ Es gibt genau s verschiedene Gundlösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

5. Für $n = m$, d. h. für ein quadratisches System gilt:

   Für jede rechte Seite gibt es höchstens eine Lösung. (Eindeutigkeit)
   $\Leftrightarrow$ Das homogene System besitzt nur die Lösung 0.
   $\Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem ist für jede rechte Seite lösbar.
   $\Leftrightarrow$ $r = n \Leftrightarrow r = m \Leftrightarrow s = 0$

36 Matrizen

36.1 Der Begriff der Matrix

Wir kommen auf die linearen Gleichungssysteme zurück und verfolgen das Ziel, für diese eine geeignetere und auch kürzere Schreibweise zu finden.

Der wesentliche Bestandteil eines Gleichungssystems sind seine Koeffizienten, sie bestimmen Rang und Corang des Gleichungssystems. Man beginnt daher beim Aufstellen der neuen Schreibweise bei den Koeffizienten:

Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Unbekannten

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

schreibt man in der Form einer sogenannten $m \times n$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine $m \times n$–Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten. Man bezeichnet Matrizen meist mit großen Druckbuchstaben. Kurzschreibweisen für allgemeine Matrizen sind

$$A = ((a_{ij}),\ i = 1 \ldots m,\ j = 1 \ldots n)$$

oder, falls Zeilen- und Spaltenzahl bereits festliegen, auch nur einfach $A = ((a_{ij}))$. Die a_{ij} nennt man die Koeffizienten oder Einträge der Matrix.

Als Beispiel betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 4x_1 & + & 13x_2 & + & 5x_3 & = & 27 \end{array} \tag{43}$$

Dieses ist ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 3 Unbekannten, es besitzt als Koeffizientenmatrix die 4×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 5 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Matrizen sind eine Verallgemeinerung der Spaltenvektoren, der Schreibweise, die man für die Lösung von Gleichungssystemen verwendet: Einen Spaltenvektor wie

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

kann man als $n \times 1$–Matrix auffassen, also als Matrix mit n Zeilen und nur einer Spalte.

Umgekehrt ist es oft günstig, eine $m \times n$–Matrix als Zusammensetzung von n Spaltenvektoren mit jeweils m Komponenten zu betrachten:

$$\begin{aligned} A &= ((a_{ij}),\, i = 1 \dots m,\, j = 1 \dots n) \\ &= (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \qquad \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad j = 1 \dots n$$

Der erste Index zählt hier die Komponente des Spaltenvektors, der zweite gibt an, dass es sich um den j-ten Spaltenvektor handelt.

Die Spaltenvektoren der Matrix (44) sind

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Menge der n–dimensionalen Spaltenvektoren wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Für Matrizen trifft man entsprechend die

<u>Definition</u>:
Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) = \{((a_{ij}),\, i = 1 \dots m,\, j = 1 \dots n) \,|\, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller (reellen) $m \times n$–Matrizen.

Die Matrix (44) ist demnach ein Element der Menge $\mathrm{M}^{4,3}(\mathbb{R})$.

Als wichtige Spezialfälle von $\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$ hat man:

- $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ ist die Menge der quadratischen Matrizen; Zeilen- und Spaltenzahl sind bei diesen gleich.
- $\mathrm{M}^{m,1}(\mathbb{R})$ ist – wie bereits erwähnt – die Menge der einspaltigen Matrizen, sie entspricht der Menge der m-dimensionalen Spaltenvektoren:
$$\mathrm{M}^{m,1}(\mathbb{R}) \hat{=} \mathbb{R}^m$$
- $\mathrm{M}^{1,n}(\mathbb{R})$ ist die Menge der einzeiligen Matrizen, sie entspricht der Menge der n-dimensionalen Zeilenvektoren:
$$\mathrm{M}^{1,n}(\mathbb{R}) \hat{=} \{(a_1, \dots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathrm{M}^{1,1}(\mathbb{R})$ ist die Menge der Matrizen mit nur einem einzigen Eintrag, sie entspricht der Menge der reellen Zahlen:
$$\mathrm{M}^{1,1}(\mathbb{R}) \,\hat{=}\, \mathbb{R}$$

Um mit Hilfe der Matrizen zu einer einfachen Schreibweise für lineare Gleichungssysteme zu gelangen, definiert man eine „Multiplikation“ zwischen einer $m \times n$–Matrix und einem n-dimensionalen Spaltenvektor:

Definition:
Seien
$$A \;=\; ((a_{i,j})) \;\in\; \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^n$$
eine $m \times n$–Matrix und ein n-dimensionaler Spaltenvektor, dann definiert man deren Produkt durch
$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} \;&=\; \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{45}$$

Verknüpft wird hier immer jeweils eine Zeile der Matrix mit dem Spaltenvektor:
$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\longrightarrow\; a_{i1}x_1 \,+\, a_{i2}x_2 \,+\, \dots \,+\, a_{in}x_n \;\in\; \mathbb{R}$$

Das Ergebnis hiervon ist eine reelle Zahl. Hat die Matrix m Zeilen, so liefert die gesamte Operation als Ergebnis m reelle Zahlen; diese bilden genau einen m–dimensionalen Spaltenvektor.

Der Wertebereich der Verknüpfung „$\cdot$“ zwischen einer $m \times n$–Matrix und einem n–dimensionalen Spaltenvektor ist somit der $\mathbb{R}^m$:
$$\cdot\, : \quad \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) \,\times\, \mathbb{R}^n \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^m$$

Jetzt braucht man nur die rechte Seite eines Gleichungssystems als m–dimensionalen Spaltenvektor darzustellen. Dann kann man statt
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + \vdots + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

das Gleichungssystem in der einfacheren Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

aufschreiben, bzw. man kann die Kurzschreibweise

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

verwenden. Der letzte Ausdruck ist die direkte Verallgemeinerung der Darstellung $ax = b$ einer einfachen Gleichung mit einer Unbekannten.

Die Matrix–Vektor–Multiplikation

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist dabei so gefasst worden, dass sie genau auf die linearen Gleichungssysteme passt!

<u>Beispiel</u>: Das Gleichungssystem (43) auf Seite 281 bekommt in Matrizenschreibweise die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Beim Reduzieren des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Verfahren schreibt man natürlich nur die Koeffizientenmatrix und den Spaltenvektor der rechten Seite auf:

1. Normierung der ersten Gleichung liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}$$

2. Geeignete Vielfache der ersten Zeile werden von den folgenden abgezogen oder zu diesen hinzuaddiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -14 & 7 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$$

3. Die zweite Zeile wird normiert, anschließend werden geeignete Vielfache der zweiten Zeile von den folgenden abgezogen oder zu diesen hinzuaddiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{9}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Normiert man nun noch die dritte Gleichung und addiert man ihr Siebenfaches zur letzten Gleichung, so erhält man ein reduziertes Gleichungssystem, das in Matrizenschreibweise so aussieht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{9}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nachdem wir hier die Matrizen über lineare Gleichungssysteme eingeführt haben, werden wir sie jedoch – so wie es üblich ist - weitestgehend losgelöst von den Gleichungssystemen behandelt. Wir werden sehen, dass man Matrizen formal gut handhaben kann und werden insbesondere die Matrizenrechnung kennenlernen.

Eine wichtige Kennzahl „erbt“ die Matrix vom zugehörigen linearen Gleichungssystem:

Definition:
Der Rang einer Matrix M, geschrieben rg$M$, ist der Rang eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix M.

Ein Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix M hat die Gestalt $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit einem $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Will man den Rang berechnen, so erfolgt das natürlich mit dem Gaußschen Verfahren. Ist man nur am Rang der Matrix interessiert und nicht an möglichen Lösungen des Gleichungssystems, so reicht es, die Umformungsschritte des Verfahrens nur auf die Matrix anzuwenden und dabei die rechte Seite $\vec{b}$ nicht zu beachten.

Beispiel: Für die Matrix (44) ergab die Rechnung ab Seite 284

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

Eine wichtige Operation auf Matrizen ist die Transposition:

Definition:
Sei $A \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$ ein $m \times n$–Matrix. Dann ist

$$A^t \qquad \text{oder in Worten: “}A\text{ transponiert“}$$

diejenige Matrix $n \times m$–Matrix, die man erhält, wenn man A an der Hauptdiagonalen[34] spiegelt. Die Spalten von A^t sind dann genau die Zeilen von A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 13 \\ 6 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Bei nicht quadratischen Matrizen werden beim Transponieren Zeilen- und Spaltenzahl vertauscht, d. h.

$$A \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad A^t \in \mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{R})$$

Für $n \neq m$ liegt insbesondere die transponierte Matrix in einer anderen Matrizenmenge, nämlich $\mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{R})$, als die ursprüngliche. Nicht so bei quadratischen Matrizen, dort gilt:

$$A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad A^t \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$$

Da doppeltes Spiegeln zum Ursprünglichen zurückführt, gilt der

Satz:
$A \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (A^t)^t = A.$

Die zweimal transponierte Matrix ist also gleich der ursprünglichen!

Definition:
Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ heißt symmetrisch, falls sie gleich ihrer Transponierten ist:

$$A = A^t$$

[34] Die Hauptdiagonale ist die Diagonale mit den Elementen $a_{11}, a_{22}, \dots$.

Eine $n \times n$–Matrix$A = ((a_{ij}))$ ist genau dann symmetrisch, wenn ihre Einträge die Gleichungen

$$a_{ij} \;=\; a_{ji} \qquad \text{für alle} \quad i, j = 1 \ldots n$$

erfüllen. Beispiel:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ist symmetrisch,}$$

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{dagegen nicht.}$$

Zwei interessante Spezialfälle beim Transponieren sind Zeilen- und Spaltenvektoren: Ein Spaltenvektor geht in einen Zeilenvektor über und umgekehrt.

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}^{\,t} \;=\; (a_1, \ldots, a_n)$$

Dieses hat u. a. Bedeutung für die Schreibweise:

Für Zeilenvektoren gewinnt eine Schreibweise dadurch, dass man sie als transponierte Spaltenvektoren schreibt. Dieses führt auf Bezeichnungen wie $\vec{a}^{\,t}$, $\vec{b}^{\,t}$ oder $\vec{c}^{\,t}$ für Zeilenvektoren. Ist nämlich

$$\vec{c}^{\,t} \;=\; (c_1, \ldots, c_n) \tag{46}$$

ein Zeilenvektor, so ist $\vec{c}$ der zugehörige Spaltenvektor; dieses erkennt man, indem man beide Seiten der Gleichung (46) transponiert:

$$\vec{c}^{\,tt} \;=\; (c_1, \ldots, c_n)^t \;=\; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

und $\vec{c}^{\,tt} = \vec{c}$ verwendet. Ebenso verwendet man für Spaltenvektoren mitunter die bequemere Schreibweise „$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)^t$“, es ist nämlich

$$\vec{a} \;=\; (a_1, \ldots, a_n)^t \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Es folgt ein wichtiger Satz, der später noch plausibilisiert werden wird:

Satz:
Die transponierte Matrix besitzt denselben Rang wie die ursprüngliche Matrix:

$$\text{rg} A \;=\; \text{rg} A^t$$

36.2 Rechnen mit Matrizen, das Matrizenprodukt

Zunächst lassen sich zwei Matrizen derselben Dimension addieren; das Ergebnis der Addition ist wieder eine Matrix derselben Dimension:

$$+ \,:\, \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$$

Die Addition erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ein neutrales Element der Addition ist vorhanden, die Nullmatrix, die man üblicherweise einfach durch „0" bezeichnet:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ebenso gibt es zu jeder Matrix $A = ((a_{ij}))$ die negative:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Damit ist $A + (-A) = 0$. Zu beachten ist, dass man zwei Matrizen nur dann addieren oder voneinander abziehen kann, wenn sie Elemente derselben Matrizenmenge $\mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$ sind.

Weiterhin kann man eine Matrix mit einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren; diese Multiplikation erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die bedeutsamste Rechenoperation für Matrizen ist das Matrizenprodukt, das zwischen Matrizen passender Dimension erfüllt ist:

Ist $A \in \mathrm{M}^{l,m}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$, so lässt sich mit diesen Matrizen die Matrizenmultiplikation ausführen:

$$A \cdot B = C$$

Das Ergebnis ist eine Matrix $C \in \mathrm{M}^{l,n}(\mathbb{R})$.

Notwendige Bedingung für die Existenz des Matrizenprodukts ist also:

Spaltenanzahl von A = **Zeilenanzahl von** B

Die **Ergebnismatrix** $C \in \mathrm{M}^{l,n}(\mathbb{R})$ der Multiplikation **erbt** dann die **Zeilenanzahl** vom ersten Faktor $A \in \mathrm{M}^{l,m}(\mathbb{R})$ und die **Spaltenanzahl** vom zweiten Faktor $b \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$.

Zur Bezeichnung der Matrizenmultiplikation wird auch der Malpunkt "$\cdot$"verwendet.

Zur Herleitung der genauen Definition des Matrizenproduktes kehren wir zur Multiplikation von Matrizen mit Spaltenvektoren zurück:

Wir betrachten dazu den zweiten Faktor B wieder als aus n Spaltenvektoren zusammengesetzt:

$$B \;=\; (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) \qquad \text{mit} \quad \vec{b}_j \;=\; \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad j = 1 \ldots n$$

Dann erhalten wir $A \cdot B$ durch Multiplikation von jedem dieser Spaltenvektoren $\vec{b_j}$ $j = 1 \ldots n$ mit der Matrix A!

<u>**Definition**</u>:
Sei $A = ((a_{ki})) \in \mathrm{M}^{l,m}(\mathbb{R})$ eine $l \times m$–Matrix und $B = ((b_{ij})) \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$ eine $m \times n$–Matrix. Dann ist deren Produktmatrix

$$C \;=\; A \cdot B \;=\; (A \cdot \vec{b}_1, \ldots, A \cdot \vec{b}_n).$$

Die Produktmatrix C ist die $l \times n$–Matrix $C = ((c_{kj})) \in \mathrm{M}^{l,n}(\mathbb{R})$ mit den Koeffizienten

$$c_{kj} \;=\; (A \cdot b_j)_k \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{ki} b_{ij} \qquad \text{für} \quad \begin{array}{rcl} k &=& 1 \ldots l \\ j &=& 1 \ldots n \end{array} \tag{47}$$

Man beachte, dass der zweite Index der Einträge von A und der erste Index der Einträge von B denselben Wertebereich durchlaufen; dieses ist auch genau der Bereich des Summationsindex' in (47).

Wir wollen jetzt das Matrizenprodukt $A \cdot B = C$ noch etwas genauer betrachten und dabei zwei weitere wichtige Schreibweisen für dieses gewinnen. Zunächst erkennt man, dass bei der Berechnung der Koeffizienten c_{kj} von C, also in

$$c_{kj} \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{ki} b_{ij} \;=\; a_{k1} b_{1j} + \ldots + a_{km} b_{mj} \tag{48}$$

die k-te Zeile $(a_{k1}, \ldots, a_{km})$ von A mit der j-ten Spalte $(b_{1j}, \ldots, b_{mj})^t$ von B miteinander verknüpft werden:

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{ccccc} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mj} & \ldots & b_{mn} \end{array}\right) \\
 & \downarrow \\
\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{k1} \quad \ldots \quad a_{km}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \ldots & a_{lm} \end{array}\right) \rightarrow & c_{kj}
\end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 9 \cdot 0 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 9 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 25 & 51 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nochmals die wichtige Bemerkung: Die Multiplikation zweier Matrizen kann nur dann ausgeführt werden, wenn die Dimensionen passend sind: Die Spaltenzahl des linken Faktors muss gleich der Zeilenzahl des rechten Faktors sein; also

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{M}^{l,m}(\mathbb{R}) & \times & \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}^{l,n}(\mathbb{R}) \\ A & \cdot & B & = & C \end{array} \tag{49}$$

Die Produktmatrix „erbt“ die Zeilenzahl vom linken und die Spaltenzahl vom rechten Faktor.

Satz[35]:
Sei $A \in \mathrm{M}^{l,m}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R})$. Dann ist $A \cdot B$ definiert, und es gilt

$$(A \cdot B)^t \;=\; B^t \cdot A^t \tag{50}$$

(Man beachte, dass wegen $B^t \in \mathrm{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ und $A^t \in \mathrm{M}^{m,l}(\mathbb{R})$ auch das Produkt $B^t \cdot A^t$ definiert ist.)

Die folgenden **Rechenregeln für das Matrizenprodukt** werden ohne Beweise[36] gebracht. Sehr wichtig ist darunter insbesondere die erste Aussage, das Assoziativgesetz:

[35] Ohne Beweis!
[36] Diese Beweise erfolgen durch Nachrechnen.

Satz:
Die folgenden Matrizen seien gegeben

$$A,\, A_1,\, A_2 \in \mathrm{M}^{l,m}(\mathbb{R}), \quad B,\, B_1,\, B_2 \in \mathrm{M}^{m,n}(\mathbb{R}), \quad \text{und} \quad C \in \mathrm{M}^{n,p}(\mathbb{R})$$

Dann gilt:

1. Das Assoziativgesetz:
$$(A \cdot B) \cdot C \;=\; A \cdot (B \cdot C)$$
2. Das 1. Distributivgesetz:
$$(A_1 + A_2) \cdot B \;=\; A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$$
3. Das 2. Distributivgesetz:
$$A \cdot (B_1 + B_2) \;=\; A \cdot B_1 + A \cdot B_2$$
4. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist
$$\lambda \cdot (A \cdot B) \;=\; (\lambda \cdot A) \cdot B \;=\; A \cdot (\lambda \cdot B)$$

Achtung: Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ , d.h. in der Regel gilt

$$A \cdot B \;\neq\; B \cdot A.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 9 \cdot 0 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 9 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 25 & 51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 9 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 8 & 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 9 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \qquad (51)$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 16 & 2 \\ 37 & 38 & 16 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

Zum Schluss dieses Abschnitts noch ein weiteres Beispiel zur Anwendung des Matrizenproduktes. Wir betrachten die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und berechnen deren Quadrat

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36.3 Quadratische Matrizen und die Umkehrmatrix (inverse Matrix)

Multipliziert man zwei Matrizen passender Dimension miteinander so hat im allgemeinen die Produktmatrix eine andere Dimension als die beiden Faktoren (siehe (49) auf Seite 290), d. h. liegt in einer anderen Matrizenmenge $\mathrm{M}^{l,n}(\mathbb{R})$.

Anders (besser!) verhält es sich bei quadratischen Matrizen: Sind zwei quadratische Matrizen A und B derselben Dimension gegeben, so sind beide Matrizenprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert, und die Ergebnisse sind wieder quadratische Matrizen derselben Dimension (siehe dazu (49) mit $l = m = n$):

$$A,\, B \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad A \cdot B,\, B \cdot A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$$

Damit wird die Matrizenmultiplikation zu einer inneren Verknüpfung der Menge $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$: Sie ist für alle Elemente aus $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ definiert, und $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen bezüglich „$\cdot$“.

Zum Vergleich sei daran erinnert, dass die übliche Multiplikation eine innere Verknüpfung der Menge der reellen Zahlen ist.

Betrachtet man $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ zusammen mit den beiden inneren Verknüpfungen „+“ (der komponentenweisen Addition) und „$\cdot$“, so spricht vom Matrizenring und schreibt

$$(\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}),\, +,\, \cdot)$$

Bezüglich der Addition gilt das auf der Seite 288 ausgeführt; insgesamt gilt: Zusammen mit „+“ ist $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ eine kommutative Gruppe mit der Nullmatrix als neutralem Element;

das negative Element einer Matrix erhält man dadurch, dass man jeden ihrer Einträge durch dessen Negatives ersetzt.

Wir wollen uns jetzt der anderen inneren Verknüpfung „·“ zuwenden. Zunächst gilt auch hier der Satz auf Seite 291:

- "·ïst assoziativ, d. h.

$$A, B, C \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- Zusammen mit der Addition gelten die Distributivgesetze:

$$A, B, C \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} (A+B) \cdot C & = & A \cdot C + B \cdot C \\ A \cdot (B+C) & = & A \cdot B + A \cdot C \end{array}$$

Wie steht es bei der Matrizenmultiplikation bezüglich

- Kommutativität
- neutralem Element
- Inversenbildung

Wir gehen nacheinander diese Punkte durch. Dazu setzen wir fortan $n > 1$ voraus. Für $n = 1$ entspricht $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ der Menge der reellen Zahlen (Aufgaben: Machen Sie sich dieses klar!):

$$(\mathrm{M}^{1,1}(\mathbb{R}), +, \cdot) \tilde{=} (\mathbb{R}, +, \cdot)$$

Zunächst muss man nochmals feststellen, dass die Matrizenmultiplikation **nicht kommutativ** ist, d. h. es gibt Matrizen $A, B \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein neutrales Element zur Matrizenmultiplikation ist vorhanden; dieses ist die sogenannte Einheitsmatrix, bezeichnet mit „E“:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist die Matrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle gleich 1 und sonst gleich 0 sind. Die Einträge von E bezeichnet man üblicherweise mit δ_{ij}:

$$E = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Die δ_{ij} heißen Kroneckersymbole.

Eine weitere Schreibweise für die Einheitsmatrix ist die Darstellung durch Spaltenvektoren:

$$E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

$$\text{mit} \quad \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow j\text{-te Stelle} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Die $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bezeichnet man als die n-dimensionalen Einheitsvektoren; die Einheitsvektoren enthalten genau eine Eins und sonst Nullen. Für $n = 3$ hat man beispielsweise

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusammen ergeben diese die dreidimensionale Einheitsmatrix:

$$E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um zu zeigen, dass E wirklich neutrales Element ist, bedarf es zweier Sätze:

Satz:
Für alle $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ ist

$$E \cdot A = A.$$

Beweis: Sei $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$; wir zeigen im ersten Schritt $E \cdot \vec{a} = \vec{a}$:

$$\begin{aligned} E \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \cdots + 0 \cdot a_n \\ \vdots \\ 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{a} \end{aligned}$$

Stellt man jetzt A in Spaltenschreibweise dar, so folgt im zweiten Schritt

$$\begin{aligned} E \cdot A \;=\; E \cdot (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) &= (E \cdot \vec{a}_1, \ldots, E \cdot \vec{a}_n) \\ &= (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \;=\; A \end{aligned}$$

Denn, wie eben gezeigt, ist stets $E \cdot \vec{a}_j = \vec{a}_j$. qed.

Bis jetzt wurde nur gezeigt, dass für alle $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$E \cdot A \;=\; A$$

gilt, d. h. es wurde nur gezeigt, dass E ein sogenanntes linksneutrales Element ist. Man kann daraus **nicht** unmittelbar folgern, dass auch

$$A \cdot E \;=\; A \tag{53}$$

gilt, denn die Matrizenmultiplikation ist **nicht** kommutativ!.

Die Gleichung (53) wird im nächsten Satz gezeigt; dabei wird verwendet, dass die Einheitsmatrix symmetrisch ist

$$E^t \;=\; E$$

Satz:
Für alle $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ gilt

$$A \cdot E \;=\; A$$

Beweis: Im vorangegangenen Satz wurde gezeigt, dass für alle $B \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ gilt

$$B \;=\; E \cdot B$$

Dieses wenden wir auf die Matrix A^t (der Transponierten unserer gegebenen Matrix A) an:

$$A^t \;=\; E \cdot A^t$$

und transponieren beide Seiten dieser Gleichung

$$A^{tt} = (E \cdot A^t)^t$$

Wegen $A^{tt} = A$ und $E^t = E$ folgt daraus nach Gleichung (50) auf Seite 290

$$A = (E \cdot A^t)^t = A^{tt} \cdot E^t = A \cdot E$$

qed.

Die Einheitsmatrix E ist ein links- und rechtsneutrales Element. Ist ein solches vorhanden, so stellt sich sofort die Frage nach inversen Elementen: Zu $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ ist ein $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit

$$A \cdot D = E$$

gesucht. Man muss jedoch sogleich feststellen, dass es – im Gegensatz zu den reellen Zahlen – nicht zu jedem von Null verschiedenen Element ein Inverses gibt. Als Beispiel betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Setzt man hilfsweise

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

so rechnet man nach:[37]

$$C \cdot A = 0 \tag{54}$$

Angenommen, A besitzt ein Inverses, d. h. es gibt eine Matrix $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot D = E$. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (54) von rechts mit dieser Matrix D, so folgt

$$C \cdot \underbrace{A \cdot D}_{=E} = \underbrace{0 \cdot D}_{=0}$$

$$\Rightarrow \qquad C \cdot E = C = 0$$

Widerspruch, denn nach Definition ist $C \neq 0$.

Der folgende Satz gibt an, wann eine Matrix invertierbar ist; der zweite Teil seines Beweises weist darüber hinaus einen Weg, um zu einer gegebenen Matrix deren Inverse zu berechnen.

Satz:
Sei $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$. Zu A gibt es genau dann eine Matrix $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit

$$A \cdot D = E$$

wenn $\mathrm{rg}A = n$ ist, d. h. genau dann, wenn A vollen Rang hat.

Beweis: Zwei Richtungen sind zu zeigen.

[37] Die Matrizen C und A sind auch ein Beispiel für Nullteiler. $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ ist also - anders als $\mathbb{R}$ - nicht nullteilerfrei.

1. Es sei eine Matrix $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot D = E$ vorhanden. Zu zeigen: Dann folgt $\mathrm{rg}A = n$.

   Dieses wird gezeigt, in dem man nachrechnet, dass ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizentenmatrix A den Rang n besitzt.

   Ein quadratisches Gleichungssystem mit n Unbekannten hat genau dann den vollen Rang n, wenn es für jede rechte Seite lösbar ist (siehe die zweite Aussage des Satzes auf Seite **??** sowie auch Seite 280). Zu zeigen bleibt also, dass für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

   $$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{55}$$

   vorhanden ist. Mit Hilfe der Matrix D kann man die Lösung sofort angeben: Diese lautet:

   $$\vec{x} = D \cdot \vec{b} \tag{56}$$

   Dann ist nämlich, wenn man dieses in Gleichung (55) einsetzt:

   $$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \underbrace{A \cdot D}_{=E} \cdot \vec{b} \\ &= E \cdot \vec{b} = \vec{b} \end{aligned}$$

   In der Tat hat man so eine Lösung von (55) für eine beliebige rechte Seite $\vec{b}$ gefunden. A hat folglich den Rang n.

2. Jetzt werde umgekehrt vorausgesetzt, dass $\mathrm{rg}A = n$ ist; zu zeigen ist nun: es gibt ein $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot D = E$.

   Da $\mathrm{rg}A = n$ ist, hat ein quadratischen Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A, also

   $$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

   den Rang n und ist für jede rechte Seite $\vec{b}$ lösbar. Insbesondere lassen sich Lösungen finden, wenn man für $\vec{b}$ die n Spalten der Einheitsmatrix $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ einsetzt; dieses liefert die n Gleichungssysteme

   $$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j \qquad \text{für} \quad j = 1 \ldots n \tag{57}$$

   Sei $\vec{d_j} \in \mathbb{R}^n$ jeweils die Lösung hiervon. Dann kann man schreiben

   $$A \cdot \vec{d_j} = \vec{e}_j \qquad \text{für} \quad j = 1 \ldots n$$

   Definiert man nun die Matrix $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ durch

   $$D = (\vec{d_1}, \ldots, \vec{d_n})$$

so ist

$$\begin{aligned} A \cdot D &= A \cdot (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n) \\ &= (A \cdot \vec{d}_1, \ldots, A \cdot \vec{d}_n) \\ &= (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \\ &= E \end{aligned}$$

D ist die gesuchte inverse Matrix zu A. qed.

Im zweiten Teil des Beweises wurde die inverse Matrix mit Hilfe linearer Gleichungssysteme gefunden. Wir kommen darauf zurück, wenn wir die Inverse einer gegebenen Matrix explizit berechnen wollen.

Ist zu $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ ein $D \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A \cdot D = E$ vorhanden, so schreibt man für D

$$A^{-1}$$

und nennt A^{-1} die Umkehrmatrix zu A. Existiert A^{-1}, so nennt man A umkehrbar oder invertierbar.

Wegen der fehlenden Kommutativität der Matrizenmultiplikation taucht hier wieder ein Problem auf: Es ist zwar

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Daraus folgt aber noch nicht, dass auch $A^{-1} \cdot A = E$ ist. Wir wissen eben bis jetzt nur, A^{-1} ein Rechtsinverses zu A; dass A^{-1} auch Linksinverses ist, ist eine der Aussagen des folgenden Satzes.

Satz:
Die Matrix $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ sei umkehrbar mit Umkehrmatrix A^{-1}. Dann gilt

1. Die Matrix A^{-1} ist ebenfalls umkehrbar.
2. Ist $(A^{-1})^{-1}$ die (rechtsinverse) Umkehrmatrix von A^{-1}, so ist
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
3. Es ist
$$A^{-1} \cdot A = E$$

Nun wissen wir, dass A^{-1} sowohl Links- als auch Rechtsinverses zu A ist:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Wir wollen jetzt ein Verfahren kennenlernen, zu $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{rg}A = n$ die Umkehrmatrix A^{-1} zu berechnen. In dem Beweis des Satzes auf Seite 296 wurde das Verfahren bereits beschrieben: Man muss die Gleichungssysteme

$$A\dot{\vec{x}} \;=\; \vec{e}_j \tag{58}$$

für $j = 1 \ldots n$ lösen. Dabei sind $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ die Spalten der Einheitsmatrix $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Sind $\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n$ die Lösungen der Gleichung (58), so ist – wie gezeigt -

$$A^{-1} \;=\; (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n)$$

Da sich die n Gleichungssysteme (58) nur um die rechten Seiten unterscheiden, lassen sie sich mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens <u>simultan</u> lösen. Man schreibt dazu die gemeinsame Koeffizientenmatrix A und die rechten Seiten nebeneinander auf:

$$A \mid \vec{e}_1 \mid \vec{e}_2 \mid \cdots \mid \vec{e}_n$$

bzw. ausführlicher

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left| \ldots \right| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anschließend beginnt man mit dem Umformen nach dem Gaußschen Verfahren. Die Umformungsschritte wendet man hier nicht nur auf die <u>eine</u> rechte Seite, sondern auf die n rechten Seiten an. Dieses liefert die reduzierte Form der n Gleichungssysteme; sie bekommen damit die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \alpha_{3n-1} & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \vec{e}_1^{\,(1)} \mid \vec{e}_2^{\,(1)} \mid \cdots \mid \vec{e}_n^{\,(1)}$$

Die $\vec{e}_1^{\,(1)}, \ldots, \vec{e}_n^{\,(1)}$ sind die umgeformten rechten Seiten. Auf der gesamten Diagonalen der reduzierten Koeffizientenmatrix müssen Einsen stehen, da ja $\mathrm{rg}A = n$ vorausgesetzt ist. Stieße man hier auf Nullgleichungen, so wäre $\mathrm{rg}A < n$, und man könnte die Rechnung abbrechen, da A nicht invertierbar wäre.

Wegen der Einsen auf der Diagonalen kann man die weitere Rechnung dadurch beschleunigen, dass man die Gleichungssysteme noch weiter reduziert. Die Fortsetzung des Reduktionsvorganges soll dazu führen, dass auch oberhalb der Diagonalen nur Nullen stehen. Die Vorgehensweise dabei lautet:

Als erstes zieht man für $i = 1 \dots n-1$ das α_{in}–Fache der letzten Zeile von der i-ten Zeile ab; dieses liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n-1} & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \alpha_{3n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \vec{e}_1^{\,(2)} \mid \vec{e}_2^{\,(2)} \mid \cdots \mid \vec{e}_n^{\,(2)}$$

Jetzt sind die Elemente der letzten Spalte außerhalb der Diagonalen alle Null. Die rechten Seiten haben sich aufgrund der Zeilensubtraktionen auch weiter verändert.

Man verfährt jetzt so weiter, indem man – von hinten beginnend – für $j = n-1 \dots 2$ und bei festem j jeweils für $i = 1 \dots j-1$ das α_{ij}–Fache der j-ten Zeile von der i-ten Zeile abzieht; dieses liefert die vollständig reduzierte Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \vec{f}_1 \mid \vec{f}_2 \mid \cdots \mid \vec{f}_n$$

Dabei sind die $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ die endgültig umgeformten rechten Seiten. Die Koeffizientenmatrix ist in die Einheitsmatrix verwandelt worden. Damit kann man die vollständig reduzierten Gleichungssysteme schreiben als

$$E \cdot \vec{x} \;=\; \vec{f}_j \qquad \text{für} \quad j = 1 \dots n \tag{59}$$

Wegen

$$E \cdot \vec{f}_j \;=\; \vec{f}_j$$

sind die Lösungen von (59) und damit auch die Lösungen von (58) genau die n Spaltenvektoren $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. Die aus deren Zusammensetzung gebildete Matrix

$$D \;=\; (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$$

ist gerade die Umkehrmatrix von A, also

$$A^{-1} \;=\; (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$$

Beipiel: Wir wollen die Umkehrmatrix der 3×3–Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 22 \\ 3 & 10 & 38 \end{pmatrix}$$

berechnen und schreiben dazu

$$A \mid \vec{e}_1 \mid \vec{e}_2 \mid \vec{e}_3$$

Ausgeschrieben lautet dies

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 22 \\ 3 & 10 & 38 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geeignete Vielfache der ersten Zeile werden von den folgenden Zeilen abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Vierfache der zweiten wird von der letzen Zeile abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 17 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt setzt man die Reduzierung fort; dabei wird das 7–Fache der letzten von der zweiten und das 3–Fache der letzten von der ersten Zeile abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -50 \\ -124 \\ 17 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ -4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss wird das Zweifache der zweiten Zeile von der ersten abgezogen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 198 \\ -124 \\ 17 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -46 \\ 29 \\ -4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir als Ergebnis unserer Berechnung erhalten:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 22 \\ 3 & 10 & 38 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 198 & -46 & 11 \\ -124 & 29 & -7 \\ 17 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Umkehrmatrix lässt sich das Gleichungssystem

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

sofort lösen. Multipliziert man beide Seiten dieser (Matrizen-) Gleichung von links mit A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

so folgt daraus sofort die eindeutige Lösung

$$\boxed{\vec{x} \;=\; A^{-1} \cdot \vec{b}}$$

Beispiel: Die eindeutige Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 22 \\ 3 & 10 & 38 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 22 \\ 3 & 10 & 38 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 198 & -46 & 11 \\ -124 & 29 & -7 \\ 17 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 513 \\ -321 \\ 44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Berechnung der Umkehrmatrix ist immer dann angezeigt, wenn ein quadratisches Gleichungssystem mit vollem Rang mehrmals mit unterschiedlichen rechten Seiten zu lösen ist. Hat man die Umkehrmatrix vorliegen, dann beschränkt sich der Aufwand beim Berechnen einer Lösung auf eine einfache Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.

Aufgabe: Eine Diagonalmatrix ist eine $n \times n$–Matrix, deren Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen alle gleich Null sind:

$$D \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & 0 & \\ & & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie: D ist genau dann umkehrbar, wenn $\lambda_j \neq 0$ für $j = 1 \ldots n$ ist, und dass in diesem Falle die Umkehrmatrix durch

$$D^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & & & \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & & \\ & 0 & \ddots & 0 & \\ & & 0 & \lambda_{n-1}^{-1} & 0 \\ & & & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

gegeben ist!

Es folgen zwei nützliche Formeln im Zusammenhang mit den Einheitsvektoren. Zu deren Herleitung schreiben wir die $n \times n$–Matrix A und anschließend auch die Einheitsmatrix in Spaltenschreibweise:

$$\begin{array}{rcll} A & = & (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) & \text{Spaltenschreibweise} \\ & = & A \cdot E & \\ & = & A \cdot (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) & \text{Spaltenschreibeise für} \\ & & & \text{die Einheitsmatrix} \\ & = & (A \cdot \vec{e}_1, \ldots, A \cdot \vec{e}_n) & \text{nach Gleichung (??)} \\ \text{also:} & & & \\ (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) & = & (A \cdot \vec{e}_1, \ldots, A \cdot \vec{e}_n) & \end{array}$$

Die letzte Gleichung gibt die Gleichheit zweier Matrizen an; da zwei Matrizen genau dann gleich sich, wenn ihre entsprechenden Spalten gleich sind, liefert dieses

$$A \cdot \vec{e}_j \;=\; \vec{a}_j \qquad \text{für} \quad j = 1 \ldots n \tag{60}$$

Diese Gleichung besagt: die Multiplikation einer Matrix mit dem j-ten Einheitsvektor liefert die j-te Spalte der Matrix.

Jetzt werde vorausgesetzt, dass die Matrix A umkehrbar ist. Multipliziert man die Gleichung (60) von links mit A^{-1}, so erhält man

$$\begin{array}{rrcll} & A^{-1} \cdot A \cdot \vec{e}_j & = & A^{-1} \cdot \vec{a}_j & \\ \Rightarrow & \vec{e}_j & = & A^{-1} \cdot \vec{a}_j & \text{für} \quad j = 1 \ldots n \end{array} \tag{61}$$

Der nächste Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen Matrizenmultiplikation und Inversenbildung.

Satz:
Sind $A, B \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ zwei umkehrbare Matrizen, so ist auch ihr Produkt umkehrbar, und die Umkehrmatrix des Produktes erhält man durch

$$(A \cdot B)^{-1} \;=\; B^{-1} \cdot A^{-1} \tag{62}$$

Beweis: Man zeigt, dass $B^{-1} \cdot A^{-1}$ die Umkehrmatrix von $A \cdot B$ ist, indem man ganz einfach nachrechnet, dass diese beiden Matrizen miteinander multipliziert die Einheitsmatrix ergeben:

$$\begin{array}{rcl} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) & = & (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) \\ & = & A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ & = & A \cdot E \cdot A^{-1} \\ & = & A \cdot A^{-1} \\ & = & E \end{array}$$

qed.

Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen Inversenbildung und Transponieren; den herzuleiten, stellen wir als

Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichung (50) auf Seite 290: Die Transponierte einer umkehrbaren Matrix ist ebenfalls umkehrbar. Die Inverse der Transponierten erhält durch

$$(A^t)^{-1} \;=\; (A^{-1})^t$$

In Worten lautet diese Gleichung: Die Inverse der Transponierten ist die Transponierte der Inversen.

37 Die Determinante

37.1 Einführung und Definition

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, eine Funktionen von der Menge der quadratischen n–reihigen Matrizen[38] in die Menge der reellen Zahlen, d. h. eine Funktion

$$det: \; \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \;\mapsto\; \mathbb{R}$$

zu finden, die „gute rechnerische Eigenschaften“ besitzt und für die gilt

$$det(A) \begin{cases} \neq 0 & \text{falls } A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \text{ umkehrbar ist} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist dann die sogenannte Determinante.

Beispiel: Wir betrachten die 2×2–Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und dazu das Gleichungssystem

$$A \cdot \vec{x} \;=\; \vec{b}$$

mit der rechten Seite $\vec{b} = (b_1, b_2)^t$. Ausgeschrieben lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

[38]**Merke:** Determinanten sind **nur für quadratische Matrizen** definiert !!

Wir versuchen dieses Gleichungssystem zu lösen, indem wir hier die erste Gleichung mit a_{21} und die zweite Gleichung mit a_{11} multiplizieren:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}a_{21}x_1 \;+\; a_{12}a_{21}x_2 & = & b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_1 \;+\; a_{11}a_{22}x_2 & = & b_2a_{11} \end{array}$$

und anschließend die erste Gleichung von der zweiten abziehen:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}a_{21}x_1 \;+\; a_{12}a_{21}x_2 & = & b_1a_{21} \\ \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{d}\,x_2 & = & b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{array}$$

Man sieht leicht, dass das Gleichungssystem genau dann für jede Wahl von $\vec{b} = (b_1, b_2)^t$ lösbar ist und folglich den vollen Rang $r = 2$ besitzt, wenn $d \neq 0$ ist. Man setzt daher für 2×2–Matrix A:

$$det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Wir machen zunächst folgende

<u>Definition</u>: (**Determinante einer** 1×1**–Matrix bzw. einer** 2×2**–Matrix** A)

1. Für $A = (a) \in \mathrm{M}^{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist $det(A) = a$
2. Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}^{2,2}(\mathbb{R})$ ist $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Diese Definition der Determinanten soll nun auf $\mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinert werden [39]. Dabei hilft folgende

<u>Definition</u>:[40]
Sei A eine $n \times n$–Matrix. Dann setzt man für $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{array}{lcl} A_{ij} & : & \text{die } (n-1) \times (n-1)\text{-Matrix, die entsteht,} \\ & & \text{wenn man bei der } n \times n\text{–Matrix } A \text{ die } i\text{-te} \\ & & \text{Spalte und die } j\text{-te Zeile streicht.} \\ U_{ij} & = & \det A_{ij} \end{array} \tag{63}$$

<u>Beispiel</u>: Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}^{2,2}(\mathbb{R})$ ist

$A_{11} = a_{22}$ und damit $U_{11} = det(A_{11}) = a_{22}$

$A_{12} = a_{12}$ und damit $U_{12} = det(A_{12}) = a_{12}$

$A_{21} = a_{21}$ und damit $U_{21} = det(A_{21}) = a_{21}$

$A_{22} = a_{11}$ und damit $U_{22} = det(A_{22}) = a_{22}$

Damit erhält man folgende Darstellung der Determinante einer 2×2–Matrix A:

$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = +a_{11} \cdot U_{11} - a_{12} \cdot U_{21}$

Dies ist eine **alternierende Summe**, d.h. aufeinander folgende Summanden haben **„wechselndes Vorzeichen“**. Dabei richtet sich das Vorzeichen, d.h. der **Faktor** $+1$ **oder -1** nach der Summe der Indizes von A_{ij}: Das „Vorzeichen“ entspricht $(-1)^{i+j}$ also

$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = +a_{11} \cdot U_{11} - a_{12} \cdot U_{21} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot U_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot U_{21} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot U_{j1}$

[39] Dabei wird auf die exakte mathematische Herleitung verzichtet zu Gunsten einer pragmatischen (heuristischen) Herangehensweise!

[40] Man beachte, dass hier der erste Index i die Spalte und der zweite Index j die Zeile zählt!

Damit haben wir alles bereitgestellt, um (allgemein) die Determinante einer $n \times n$–Matrix A zu definieren:

<u>**Definition**</u>: (**Determinante einer $n \times n$–Matrix A**)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot U_{j1}$$

Diese Definition ist eine **Entwicklung (nach der ersten Zeile)** in eine Summe von Unterdeterminanten!

<u>Bemerkung</u>: Diese Definition ermöglicht das **rekursive Berechnen** der Determinante einer $n \times n$–Matrix A: Im ersten Schritt erhält man eine Summe mit n Summanden. Jeder Summand enthält eine Determinante U_{1j} einer $n-1 \times n-1$–Matrix A_{1j}. Jede dieser n Determinanten U_{1j} liefert dann eine Summe mit n-1 Summanden, die jeweils eine Determinante einer $n-2 \times n-2$–Matrix enthalten. Dieser Prozess wird fortgeführt, bis nach n-2 Schritten nur noch Summanden mit Determinanten einer 2×2–Matrix übrig bleiben. Diese Determinanten werden dann explizit berechnet! Zur praktischen Berechnung der Determinanten wird die obige Darstellung nur bei 2×2–Matrizen verwendet. Für $n \times n$–Matrizen mit $n \geq 2$ sind zur Determinantenberechnung geeignetere Verfahren vorhanden (siehe später).

<u>Beispiel</u>: Die folgende Determinante wird mit dem Verfahren der Entwicklung nach der ersten Zeile berechnet:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}
&= +(-4) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -4 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) - 2 \cdot (3 \cdot 0 - 2 \cdot 4) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) \\
&= (-4) \cdot (-4) - 2 \cdot (-8) - 2 \\
&= 30
\end{aligned}$$

Dass zur Entwicklung der Determinante die erste Zeile als Entwicklungszeile verwendet wurde, ist nicht zwingend. Man kann jede andere (besonders "günstige") Zeile oder Spalte dafür auswählen! Dies regelt der folgende

Satz[41] (**Entwicklungssatz**)
Sei A eine $n \times n$–Matrix. Dann gilt:

- Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} U_{ij} \tag{64}$$

- Entwicklung nach der j-ten Zeile:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} U_{ij} \tag{65}$$

Beispiel: Die folgende Determinante wird mit dem Entwicklungssatz berechnet. Da die zweite Spalte eine Null enthält, wird nach dieser entwickelt:

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot (7 \cdot 0 - 2 \cdot 1) + 0 - 2 \cdot (3 \cdot 2 - 7 \cdot 2) \\
&= 18
\end{aligned}$$

Im Folgenden erweist es sich wieder als vorteilhaft, eine $n \times n$–Matrix in Spaltenschreibweise darzustellen:

$$A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \quad \text{mit Spaltenvektoren} \quad \vec{a}_i \in \mathbb{R}^n \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

und die Determinante als Funktion der n Spaltenvektoren aufzufassen:

$$detA = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

Man erhält damit folgende **Eigenschaften der Determinante**[42] sind:

1. Für die Determinante der Einheitsmatrix ist

$$\det E = 1$$

[41] Ohne Beweis
[42] Ohne Beweis! Für 2×2–Matrix sind die Eigenschaften elementar nachzurechnen!

2. Multipliziert man eine der Spalten $\vec{a}_j$ mit einem reellen Faktor, so kann man diesen Faktor aus der Determinanten herausziehen:

   Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \;=\; \lambda \cdot \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$

3. Ist eine der Spalten eine Summe, so kann man „die Addition aus der Determinanten herausziehen“: Hat die j-te Spalte die Gestalt $\vec{a}_j = \vec{u}_j + \vec{v}_j$, so gilt

$$\det(\vec{a}_1, \ldots\; \vec{u}_j + \vec{v}_j, \ldots, \vec{a}_n) \;=$$
$$\det(\vec{a}_1, \ldots\; \vec{u}_j, \ldots, \vec{a}_n) \;+\; \det(\vec{a}_1, \ldots\; \vec{v}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$

4. Sind zwei Spalten der Matrix gleich, so ist der Wert ihrer Determinanten Null; steht etwa die j-te Spalte auch an der i-ten Stelle mit $i \neq j$, so hat man:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \underbrace{\vec{a}_j}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \vec{a}_n) \;=\; 0$$

5. Vertauscht man zwei Spalten, so ändert der Wert der Determinanten sein Vorzeichen: für $i \neq j$ ist

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n) \;=\; -\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$

Bemerkungen:

- Die erste Eigenschaft ist die sogenannte Normierung.
- Eigenschaft 2) und 3) zusammen werden als Linearität in den Spalten bezeichnet.

  Aus Eigenschaft zwei folgt insbesondere für einen reellen Faktor λ, der bei allen n Spalten steht:

$$\det(\lambda \cdot \vec{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_j, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_n) \;=\; \lambda^n \cdot \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$

- Man kann zeigen, dass die beiden Eigenschaften 4) und 5) äquivalent sind; man bezeichnet sie als Alternierend in den Spalten.

Es folgt aus den fünf Eigenschaften sofort, dass eine Matrix A, von deren Spalten eine nur Nullen enthält, die Determinante Null besitzt: Gilt etwa für die j-te Spalte $\vec{a}_j = \vec{0}$, so ändert sich nichts, wenn man diese mit 0 multipliziert: $0 \cdot \vec{a}_j = \vec{0} = \vec{a}_j$, und man kann schließen:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1, \ldots, 0 \cdot \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\ &= 0 \cdot \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\ &= 0 \cdot \det A \;=\; 0 \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass man den Faktor 0 nach Eigenschaft 2) herausziehen kann.

Aus den Eigenschaften 2), 3) und 4) folgt gemeinsam die wichtige Regel, dass sich der Wert der Determinanten nicht ändert, wenn man von einer Spalte das Vielfache einer anderen abzieht; es gilt nämlich für $i \neq j$

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i - \lambda\vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\
&\quad = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \ldots, -\lambda\vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\
&\quad = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) - \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \\
&\quad = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n)
\end{aligned} \tag{66}$$

Hier wurde als erstes die Determinante nach Eigenschaft 3) auseinandergezogen; anschließend wurde mit Eigenschaft 2) der Faktor $-\lambda$ aus dem zweiten Summanden herausgezogen; in der letzten Zeile hat die zweite Determinante wegen der doppelt vorkommenden Spalte $\vec{a}_j$ nach Eigenschaft 4) den Wert Null.

37.2 Berechnung der Determinante mit dem Gauß-Algorithmus

Selbstverständlich könnte man die Determinante mit Hilfe der Darstellung aus der Definition oder mit Hilfe des Entwicklungssatzes berechnen. Aus praktischen Gründen und hinsichtlich des Rechenaufwandes ist aber häufig eine Berechnung beruhend auf dem Gaußschen Eliminationsverfahren vorzuziehen.

Zunächst erhalten wir aus dem Entwicklungssatz folgende Regeln:

Satz:
Sei $A \in \mathrm{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix, die in der ersten Spalte ab dem zweiten Eintrag nur Nullen enthält. Eine solche Matrix A hat die Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

mit der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die Determinante von A:

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_1$$

Satz:
Sei A eine obere Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Eine obere Dreiecksmatrix ist eine Matrix, die unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen besitzt. Für eine solche Matrix A gilt:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

$\det A$ ist gerade das Produkt der Diagonalelemente.

Folgerung: Sei A eine untere Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Für eine solche Matrix gilt ebenfalls:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Damit erhalten wir den folgenden **Zusammenhang zwischen der Existenz einer inversen Matrix und der Determinante der Matrix**:

Satz:
Eine $n \times n$–Matrix ist genau dann umkehrbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

Beweis: Die Bezeichnungen von eben werden verwendet:

$$\begin{array}{rcl} A \text{ ist umkehrbar} & \Leftrightarrow & \text{Der Rang von } A \text{ beträgt } n. \\ & \Leftrightarrow & \text{Die Stufen in der reduzierten Form verlaufen auf der Hauptdiagonalen} \\ & \Leftrightarrow & \alpha_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \\ & \Leftrightarrow & \det A = \pm\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} \neq 0 \end{array}$$

qed.

Beispiel: Wir wollen mit dem Gaußschen Verfahren die Determinante der 3×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnen:

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{Die ersten beiden Zeilen vertauschen.} \\
=\ & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{Das Zweifache der ersten Gleichung von der letzten abziehen.} \\
=\ & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} && \text{Das Zweifache der zweiten Gleichung zu der letzten hinzuzählen.} \\
=\ & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} && \text{Jetzt kann das Produkt der Diagonalelemente genommen werden.} \\
=\ & -1 \cdot 2 \cdot 9 \ = \ -18
\end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts folgen einige Bemerkungen zu den Verfahren zur Determinantenberechnung:

Entwicklungssatz: Der Nachteil besteht darin, dass ungefähr $n!$ Multiplikationen notwendig sind. Man nimmt den Entwicklungssatz nur bei kleinen Dimensionen (bis Dimension 3) oder bei Determinanten, die sehr viele Nullen enthalten. Man entwickelt dann stets nach der Zeile oder Spalte, die die meisten Nullen enthält.

Gaußsches Verfahren: Diese Methode bietet sich immer an. Da die Anzahl der notwendigen Multiplikationen – wie man zeigen kann – von der Größenordnung n^2 ist, ist für größere n das Gaußsche Verfahren von erheblich geringerem Aufwand als der Entwicklungssatz.

Mitunter empfiehlt sich auch eine Verbindung von Entwicklungssatz und Gaußschem Verfahren: Enthält bei größerem n eine Zeile oder eine Spalte viele Nullen, so entwickelt man zunächst nach dieser Spalte bzw. Zeile und wendet dann das Gaußsche Verfahren auf die Unterdeterminanten U_{ij} an.

Sarrus-Regel [43] Für 3×3-Matrizen gibt es noch ein Verfahren, das zwar bezüglich der Multiplikationen noch etwas aufwendiger als der Entwicklungssatz ist, das aber wegen seines leicht zu merkenden Schemas oft genommen wird. Man schreibt dazu die ersten beiden Spalten der Determinanten noch einmal hinter die dritte Spalte und bildet die Summe bzw. Differenz aus den Produkten, die aus drei auf einer

[43] **Gilt nur für 3×3–Matrix !!**

Schrägen liegenden Einträgen bestehen:

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

$$
\text{damit ist} \quad \det A \; = \; \begin{array}{l} + \, a_{11}a_{22}a_{33} \; + \; a_{12}a_{23}a_{31} \; + \; a_{13}a_{21}a_{32} \\ - \, a_{31}a_{22}a_{13} \; - \; a_{32}a_{23}a_{11} \; - \; a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}
$$